Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ называется симметрическим, если он инвариантен относительно действия группы S_n, то есть для любой подстановки $\tau \in S_n$ выполнено

$$\tau f(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Известны различные $\mathbb{Z}$-базисы в модуле симметрических многочленов. Например, в теории симметрических функций доказано [1]

Теорема 1 Симметрические многочлены могут быть единственным образом представлены как многочлены от $\{e_i\}$ и $\{h_j\}$, то есть

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n] = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$$

Таким образом, если $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$ и $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots$, то $\{e_\lambda\}$ и $\{h_\mu\}$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в модуле симметрических многочленов.

Равенство производящих функций $H(t)E(-t) = 1$ позволяет определить многочлены

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t)} = \sum_{k \geqslant 1} h_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{-n} h_k^{(\infty)} t^k.$$

Можно показать, что многочлены $H_k = h_k - h_k^{(\infty)}$ порождают кольцо симметрических лорановских многочленов, то есть наименьшим кольцом, содержащим $\{H_k\}$, является $\Lambda_n^{\pm}$.

Кольца $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ и $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]^{S_n}$ тесным образом связаны с конечномерными полиномиальными и просто конечномерными представлениями соответственно полной линейной группы $\mathrm{GL}(n)$.

Оказывается, с точностью до некоторых отождествлений, похожую роль в теории конечномерных представлений супергруппы Ли $\mathrm{GL}(n, m)$ играет кольцо суперсимметрических многочленов [2]:

$$\begin{aligned}\Lambda_{n,m}^{\pm} = \{ & f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]^{S_n \times S_m} \mid \\ & f(t, x_2, \dots, x_n, t, y_2, \dots, y_m) \text{ не зависит от } t\}\end{aligned}$$

Если по аналогии определить многочлены

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}(1 - y_j t)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t)} = \sum_{k \geqslant 0} h_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{m-n} h_k^{(\infty)} t^k,$$

то кольцо $\Lambda^{\pm}_{n,m}$ допускает следующее описание ($m = n = 1$).

Определение 1 Зафиксируем переменные t, $u_1, u_2 \dots$ и $v_1, v_2 \dots$. Положим $u_0 = v_0 = 1$ и $u_i = v_i = 0$ при $i < 0$. Для любого целого числа $i \in \mathbb{Z}$ определим $w_i = u_i - tv_{-i-n+m}$. Тогда кольцо, порождённое переменными $t, u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$ с соотношениями ($i, j \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{vmatrix} w_i & w_{i+1} \\ w_j & w_{j+1} \end{vmatrix} = 0,$$

будем обозначать $U^{\pm}_{1,1}$.

Теорема 2 Отображение

$$\varphi : U^{\pm}_{1,1} \to \Lambda^{\pm}_{1,1}, \quad \varphi(u_i) = h_i, \quad \varphi(v_i) = h^*_i, \quad \varphi(t) = \frac{y}{x},$$

где $h^*_k = h_k(x^{-1}, y^{-1})$, есть изоморфизм колец. Многочлены, индексируемые целыми числами,

$$K_{\lambda,\mu} = (-1)^{\mu} \left(1 - \frac{y}{x}\right) x^{\lambda} y^{\mu}$$

вместе с 1 линейно порождают $\Lambda^{\pm}_{1,1}$.

Язык теоремы 2 позволяет удобно описывать такие гомоморфизмы $\Lambda^{\pm}_{1,1} \cong U^{\pm}_{1,1} \xrightarrow{\varphi} R$, что $\ker \varphi = \langle P_{\lambda,-\lambda} \rangle$ – идеал проективных модулей. На данный момент получены необходимые условия существования в некоторых случаях.

Список литературы

[1] Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. – Oxford university press, 1998.

[2] Sergeev A. N. On rings of supersymmetric polynomials //Journal of Algebra. – 2019. – Т. 517. – С. 336-364.