Введение

В данной работе рассматривается вопрос классификации локальных гладких открытых пар над нётеровым кольцом R с точностью до мотивных или Нисневич-локальных эквивалентностей. А имеенно, рассматриваются пары схем

$$(U, U - Z) \in \mathrm{Sch}^{\mathrm{pair}}_B,$$

где $U = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ для некоторой гладкой схемы $X \in \mathrm{Sm}_B$ и точки $x \in X$, Z – замкнутая подсхема в U, см. определение **??**. Отметим, что без ораничения общьности схему Z допустимо считать приведённой поскольку имеет место равенство $U - Z = U - Z_{\mathrm{red}}$ в категории открытых подсхем U, где Z_{red} – приведённая подсхема. Когда Z является гладкой схемой над B, тогда хорошо известна Нисневич-локальная эквивалентность

$$(U, U - Z) \simeq_{\mathrm{nis}} (Z \times \mathbb{A}^{\operatorname{codim}_U Z}, Z \times (\mathbb{A}^{\operatorname{codim}_U Z} - 0)), \tag{1}$$

а в работе получено обощение указанного факта на произвольные схемы Z.

Теорема 1. *Пусть $X_0, X_1 \in \mathrm{Sm}_B$ для нетеровой отделимой схемы B, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $U_0 = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X_0,x_0}$ и $U_1 = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X_1,x_1}$ - локальная схема, Z_0 и Z_1 замкнутые подсхемы U_0 и U_1. Предположим, что*

$$\dim_B U_0 = \dim_B U_1$$

и

$$(Z_0)_{\mathrm{red}} \simeq (Z_1)_{\mathrm{red}}.$$

тогда есть Нисневич локальная эквивалентность открытых пар над B

$$(U_0, U_0 - Z_0) \simeq_{\mathrm{nis}} (U_1, U_1 - Z_1); \tag{2}$$

в терминах категории Sch_B эквивалентность (2) *означает наличие следующей коммутативной диаграмы*

$$\begin{tikzcd} U_0 & \Gamma \arrow[l, "\acute{e}tale"'] \arrow[r, "\acute{e}tale"] & U_1 \\ Z_0 \arrow[u, hook] & \Theta \arrow[u, hook] \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & Z_1 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки – замкнутые вложения заданные по условию, верхние горизонтальные стрелки являются этальными, нижние горизонтальные стрелки являются изоморфизмами, и оба коммутативных квадрата являются расслоенными, т.е.

$$\Gamma \times_{U_0} Z_0 \cong \Theta \cong \Gamma \times_{U_1} Z_1.$$

Следствие 1. *Пусть U_0, U_1, Z_0, Z_1 - такие же, как и в теореме наверху. Тогда для любого предпучка A на $\mathrm{Sm}^{\mathrm{pair}}$, который удоволетворяет аскиоме вырезания в смысле определения* **??**, *имеет место изоморфизм*

$$A(U_0, U_0 - Z_0) \simeq A(U_1, U_1 - Z_1).$$

Следствие 2. *Пусть X_0, X_1 – гладкте схемы над B, и x_0, x_1 – замкнутые точки. Предположим, что $\dim^{x_0} X_0 = \dim^{x_1} X_1$, и поля вычетов в точке x_0 и x_1 – изоморфны. Тогда существует локальная эквивалентсность пучков Нисневича*

$$X_0/(X_0 - x_0) \simeq_{\mathrm{nis}} X_1/(X_1 - x_1),$$

и как следствие мотивная эквивалентность мотивных пространств

$$X_0/(X_0 - x_0) \simeq_{\mathrm{mot}} X_1/(X_1 - x_1) \in \mathbf{H}(B)$$

в мотивной гомотопической категории Мореля-Воеводского $\mathbf{H}(B)$ [1].

Коль скоро мы говорим о классификации, то следует обсудить и импликацию в обратную сторону, а именно доказательство не изоморфизмов, т.е. утверждения в той или иной степени обратные к теореме 1 и следствию 2.

Теорема 2. *Пусть B – это схема.*

Предположим, что есть изоморфим $X_0/(X_0 - x_0) \simeq X_1/(X_1 - x_1)$ в $\mathbf{H}(B)$, для каких-то $X_0, X_1 \in \mathrm{Sm}_B$ и замкнутых точек $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, тогда

$$\dim_B^{x_0} X_0 = \dim_B^{x_1} X_1 \in \mathbb{Z},$$

и

$$p_0(x_0) = p_1(x_1) \in B, \mathrm{sdeg}_{K_0} L_0 = \mathrm{sdeg}_{K_1} L_1, \tag{3}$$

где $p_0 \colon X_0 \to B$, $p_1 \colon X_1 \to B$ – структурные морфизмы, K_0 и L_0 – поля вычетов в $p_0(x_0)$ и x_0, тоже самое для K_1 и L_1.

Звмечание 1. Так как утверждение (3) в теореме слабее, чем

$$x_0 \simeq x_1,$$

последнее утверждение также справедливо при предположении, что расширения поля L_0/K_0 и L_1/K_1 – простые.