Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей с краем

Тонышева Николь Сергеевна

НИУ ВШЭ

ntonysheva@hse.ru

Хаос в смысле Девани

X — метрическое пространство, $T: X \to X$ — непрерывное отображение. $(X, T) := \{T^n\}_{n \in N}$ — динамическая система.

Определение ([3]). Динамическая система (X, T) называется *хаотической*, если:

(1) (X, T) топологически транзитивна;

(2) множество периодических точек всюду плотно в X;

(3) (X, T) чувствительна к начальным условиям.

J. Banks et al. [1]: (1) + (2) $\Rightarrow$ (3).

Теорема (Биркгоф). *X — польское пространство без изолированных точек. Каскад (X, T) топологически транзитивен* $\Leftrightarrow \exists x \in X : \overline{\mathcal{O}.x} = X$.

Хаотическая группа гомеоморфизмов

Определение ([2]). Группа гомеоморфизмов G топологического многообразия M называется *хаотической*, если:

(1) существует всюду плотная орбита группы;

(2) объединение конечных орбит всюду плотно в M.

(1) + (2) $\Rightarrow$ чувствительность группы G (следует из [5]).

Торальные скручивающие отображения

$\mathbb{T}^2$ — стандартный 2-тор, представим его как квадрат $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ с отождествленными противоположными сторонами.

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \,|\, x \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]\}, \;\; k \in \mathbb{N},\, k > 2;$$

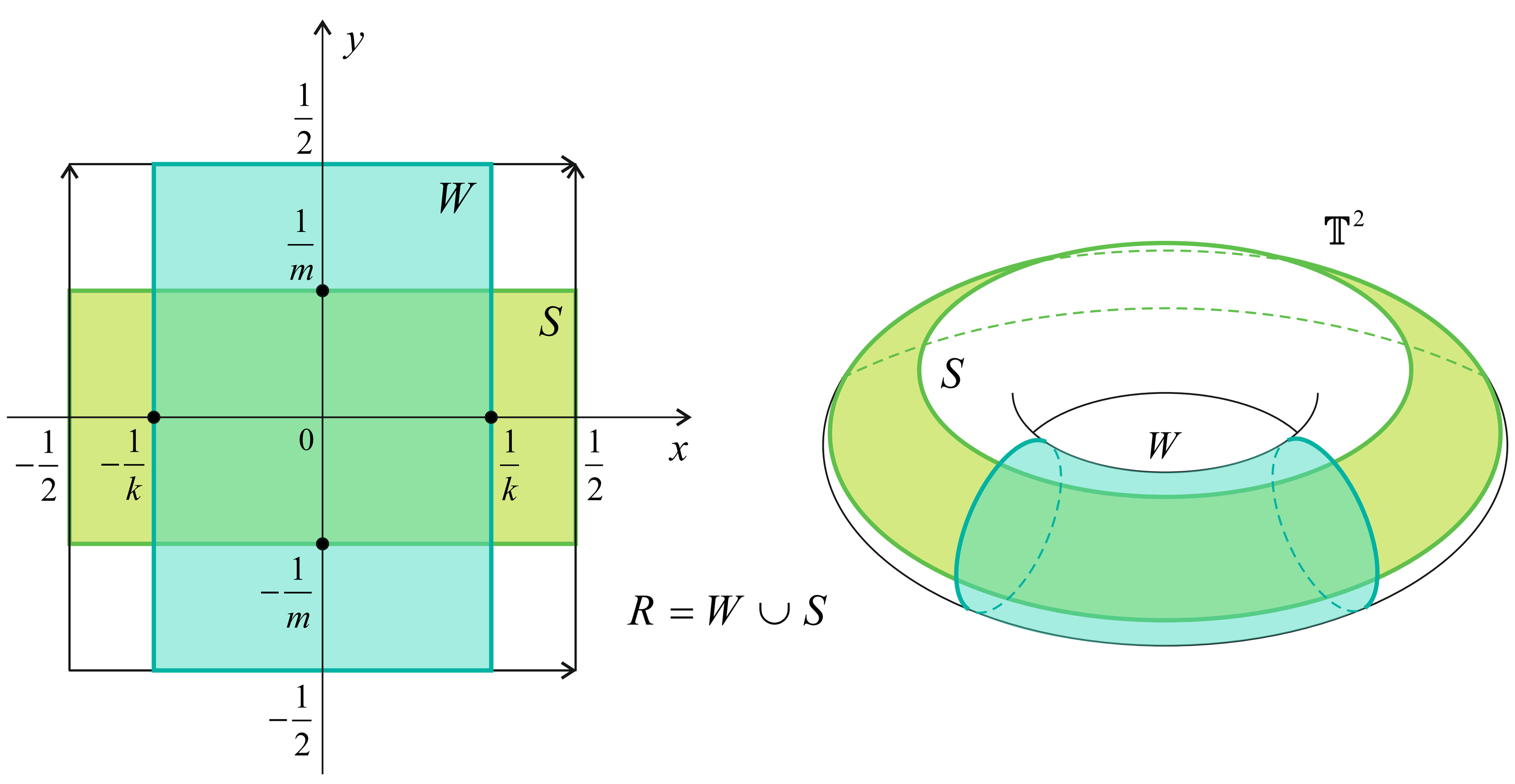
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \,|\, y \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]\}, \;\; m \in \mathbb{N},\, m > 2.$$

$R := W \cup S$, $a, b \in \mathbb{N}$. Введем следующие отображения:

$$\omega_{a,k}(x, y) := \begin{cases} (x, y + akx) & (x, y) \in W; \\ (x, y) & (x, y) \notin W; \end{cases}$$

$$\nu_{b,m}(x, y) := \begin{cases} (x + bmy, y) & (x, y) \in S; \\ (x, y) & (x, y) \notin S. \end{cases}$$

Определение. Композиция $T_\sigma := \nu_{b,m} \circ \omega_{a,k}$, где $\sigma = (a, b, k, m)$, называется *торальным скручивающим отображением.*

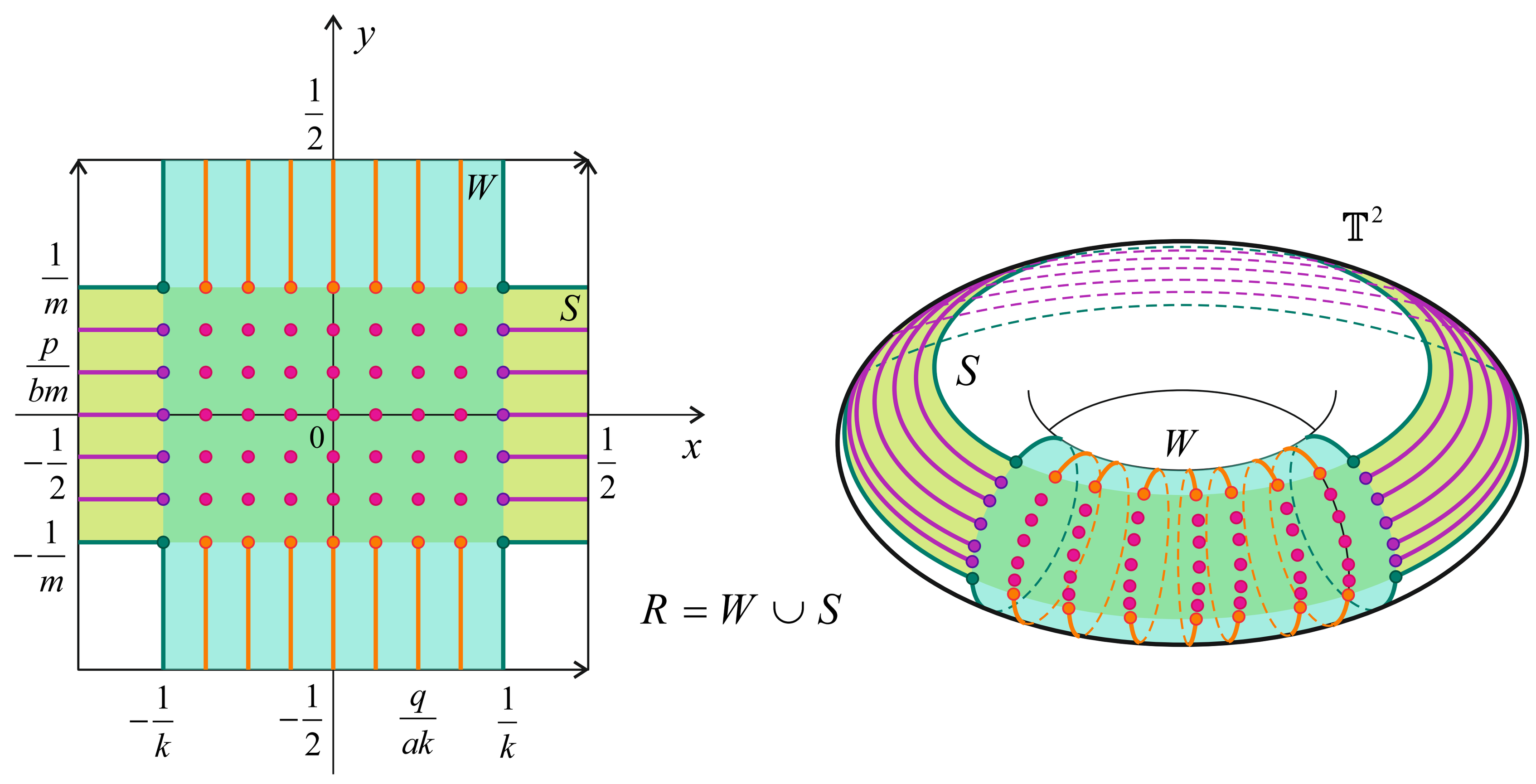


Свойства $T_\sigma : R \to R$:

- T_σ — гомеоморфизм поверхности R;
- $G_\sigma = \langle T_\sigma \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов поверхности R (вытекает из [4]);
- пространство неподвижных точек $Fix(G_\sigma)$ этой группы имеет следующую структуру:

$$Fix(G_\sigma) = \partial R \sqcup DF(G_\sigma) \sqcup IF(G_\sigma), \;\; \text{где}$$

$DF(G_\sigma)$ — максимальное дискретное подпространство в $Fix(G_\sigma)$, т.е. все изолированные неподвижные точки; $IF(G_\sigma)$ — компоненты связности пространства $Fix(G_\sigma)$, гомеоморфные отрезку.



Список литературы

[1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. *On Devaney's definition of chaos,* Amer. Math. Monthly. 1992. Vol. 99, no. 4, 332–334.

[2] G. Cairns, G. Davis, E. Elton, A. Kolganova, and P. Perversi. *Chaotic group actions.* Enseign. Math. 1995. Vol. 41, no. 1-2, 123–133.

[3] R.L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (3rd ed.). NY: Chapman and Hall/CRC, 2021.

[4] R. L. Devaney. *Linked Twist Mappings are Almost Anosov.* In: Global Theory of Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics. 1980. Vol. 819, pp. 121–145. Springer, Berlin, Heidelberg (1980).

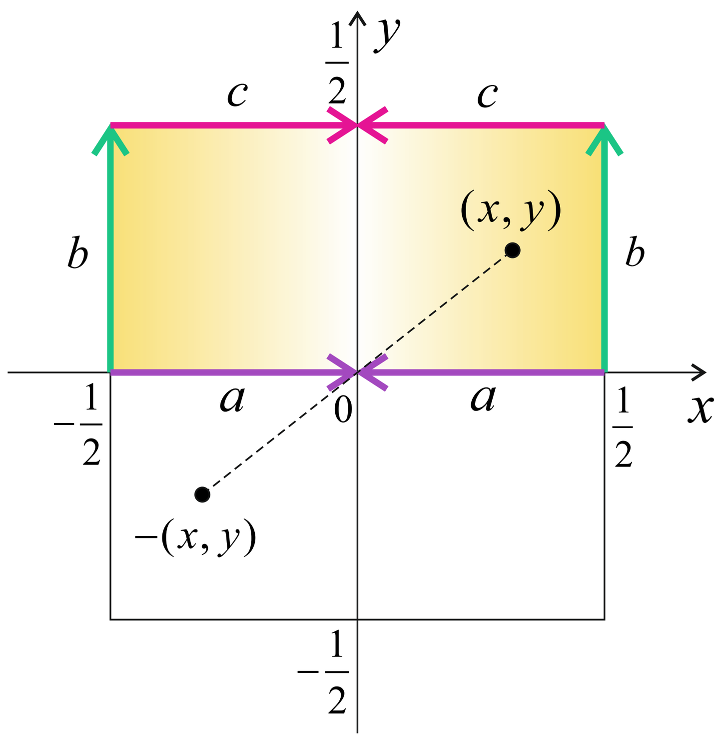
[5] Kontorovich, M. Megrelishvili. *A note on sensitivity of semigroup actions.* Semigroup Forum. 2008. Vol. 76, no. 1, 133–141.

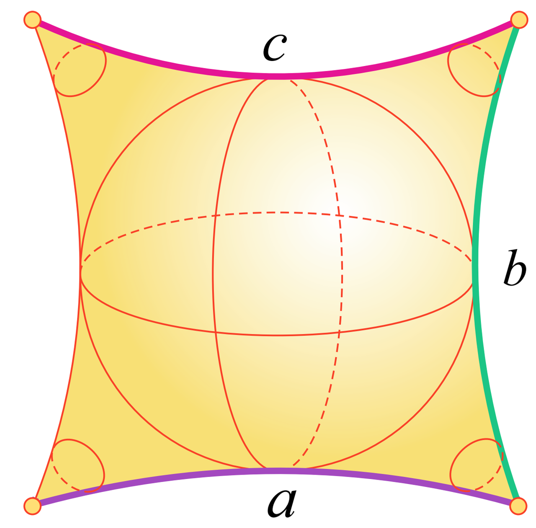
Тонышева Николь Сергеевна
НИУ ВШЭ
ntonysheva@hse.ru

Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей с краем

Орбифолд «Подушка»

$\gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ — диффеоморфизм тора.
$\Gamma = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ — группа диффеоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$.
$\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$ — орбифолд «Подушка», $\mathcal{P} \cong \mathbb{S}^2$.

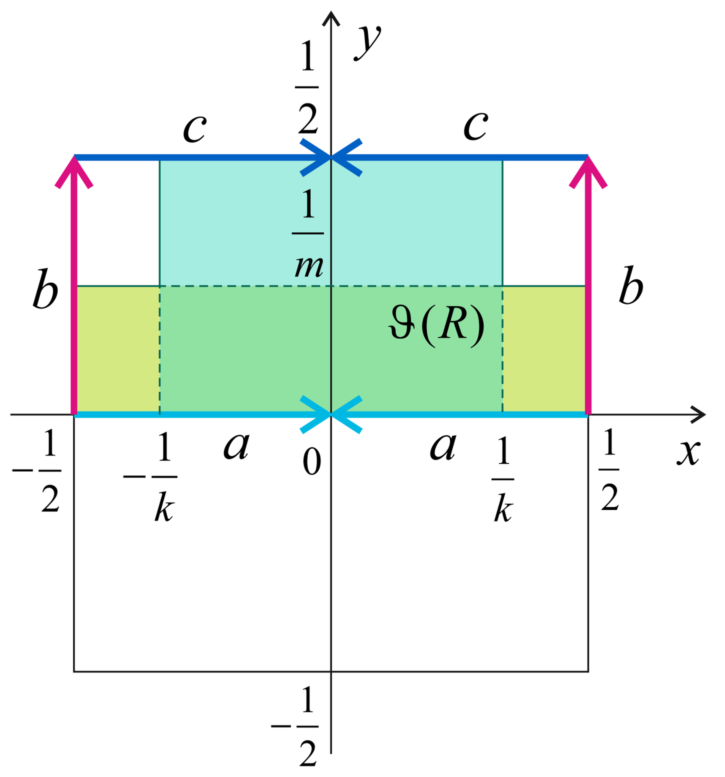


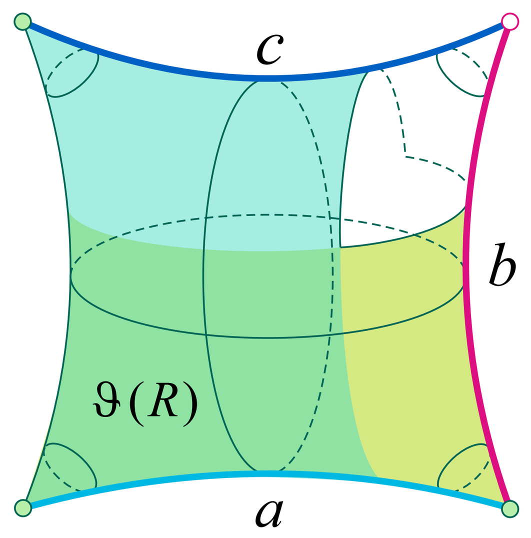


$\mathcal{P} = \mathbb{T}^2/\Gamma$

Хаотические гомеоморфизмы диска $\mathbb{B}^2$

Пусть $\vartheta : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{P}$ — проекция на $\mathcal{P}$ как на пространство орбит. Отображение $T_\sigma : R \to R$ индуцирует на $\vartheta(R) \subset \mathcal{P}$ гомеоморфизм $\widehat{T}_\sigma : \vartheta(R) \to \vartheta(R)$. Отметим, что $\vartheta(R) \cong \mathbb{B}^2$.



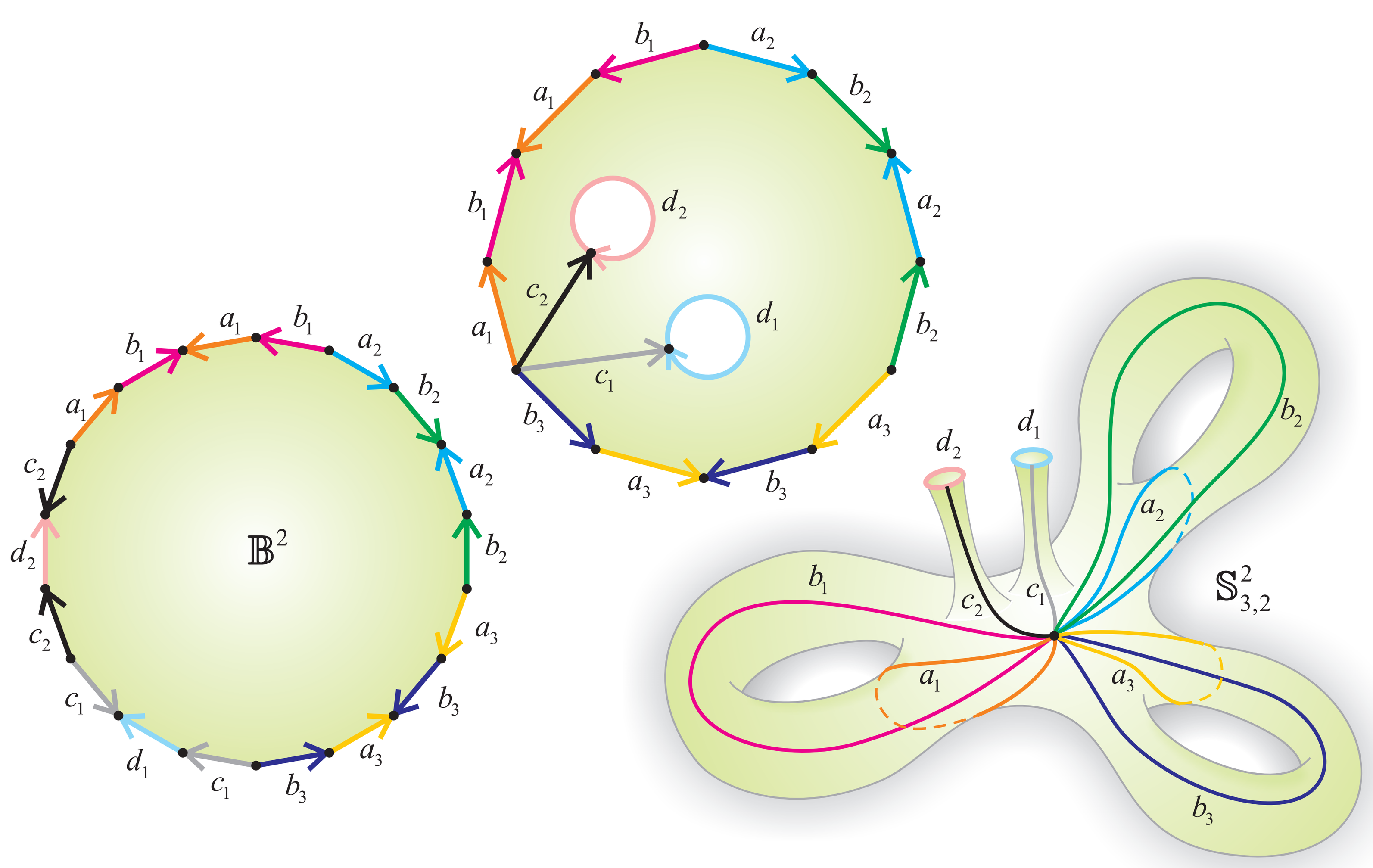


$\widehat{G}_\sigma = \langle \widehat{T}_\sigma \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов диска $\mathbb{B}^2$. Она оставляет неподвижными все точки края $\partial\mathbb{B}^2$.

Теорема. *Пусть* $\sigma = (a, b, k, m)$ *— четверка фиксированных натуральных чисел, где* $k \geq 5$, $m \geq 5$. *Тогда* $|DF(\widehat{G}_\sigma)| = 4ab - a - b + 1$.

Хаотические группы гомеоморфизмов компактных поверхностей

Отождествим $\partial\mathbb{B}^2 \cong \mathbb{S}^1$ с некоторым многоугольником и укажем правила склейки его сторон.



В результате получим одну из следующих поверхностей:

- либо сферу с n компонентами края $\mathbb{S}^2_n$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- либо сферу с p ручками и n компонентами края $\mathbb{S}^2_{p,n}$, $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- либо сферу с q пленками Мебиуса и n компонентами $\mathbb{N}^2_{q,n}$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

На каждой из перечисленных поверхностей $\widehat{T}_\sigma$ индуцирует гомеоморфизм $\widetilde{T}_\sigma$, и $\widetilde{G}_\sigma = \langle \widetilde{T}_\sigma \rangle$ — хаотическая группа гомеоморфизмов этой поверхности, причем $|DF(\widetilde{G}_\sigma)| = 4ab - a - b + 1$.

Топологическая сопряженность групп гомеоморфизмов

Группы гомеоморфизмов G и G' пространств X и X' называются *топологически сопряженными*, если $\exists\, f : X \to X'$ — гомеоморфизм и $\exists\, \mu : G \to G'$ — изоморфизм групп такие, что $\forall\, g \in G$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu(g)} \\ X & \xrightarrow{f} & X'. \end{array}$$

Лемма. *Если G и G' топологически сопряжены, то:*

(1) $Fix(G)$ и $Fix(G')$ гомеоморфны;

(2) $DF(G)$ и $DF(G')$ гомеоморфны.

Основной результат

Теорема. *Пусть M — произвольная компактная поверхность с краем или без края и $\widetilde{G}_\sigma$, где $\sigma = \sigma(a)$, $a \in \mathbb{N}$, — группа гомеоморфизмов M, определенная ранее. Тогда*

$$\{\widetilde{G}_\sigma \,|\, \sigma = \sigma(a),\ a \in \mathbb{N}\}$$

— семейство попарно топологически не сопряженных хаотических групп гомеоморфизмов M, изоморфных $\mathbb{Z}$.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю Н.И. Жуковой.
Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2022-1101.

Список литературы

[1] N.I. Zhukova, N.S. Tonysheva. *Chaotic suspended foliations of topological manifolds.* J. Math. Sci. 2023. (In printing.)