

Соответствие Дольда-Кана

Даня Кузаков

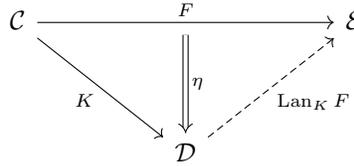
Июль 2023

Определение 1. Категория Δ состоит из ординалов $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, морфизмы — отображения, сохраняющие порядок ($i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$).

Симплициальное множество — это контравариантный функтор $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Пример 2. Нерв категории $N(C)_n = \text{Func}([n], C)$.

Определение 3. Пусть у нас есть функторы $F : C \rightarrow E$, $K : C \rightarrow D$, тогда левым расширением Кана F вдоль K называют функтор $\text{Lan}_K F : D \rightarrow E$ вместе с естественным преобразованием $\eta : F \Rightarrow \text{Lan}_K F \cdot K$, универсальным среди стрелок из F в E^D .

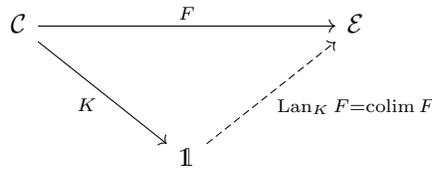


Универсальность понимается в следующем смысле. Для любой пары, состоящей из функтора $G : D \rightarrow E$ и естественного преобразования $\gamma : F \rightarrow G \cdot K$, имеется единственное естественное преобразование $\alpha : \text{Lan}_K F \rightarrow G$ такое, что для естественных преобразований выполнено равенство $\gamma = \alpha_K \cdot \eta$.

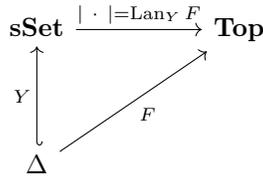
Таким образом, соответствие $\alpha \mapsto \alpha_K \cdot \eta$ определяет сопряжение функторов

$$\mathcal{E}^D(\text{Lan}_K F, G) \simeq \mathcal{E}^C(F, G \cdot K).$$

Пример 4. Копредел является левым расширением Кана.



Функтор геометрической реализации симплициального множества является левым расширением Кана.



Определение 5. Пусть A_\bullet — симплициальная абелева группа. Определим нормализованный комплекс NA_\bullet следующим образом

$$NA_n = \bigcap_{i < n} \ker d_i, \quad \partial = (-1)^n d_n : NA_n \rightarrow NA_{n-1}.$$

Теорема 6 (Соответствие Дольда-Кана). Функтор $N : \mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$ определяет эквивалентность соответствующих категорий.

Функтор в обратную сторону

$$C_* \in \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}), \quad F(C)_\bullet : (\Delta_{\text{inj}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad F(C)_n = C_n, \quad d_i : C_n \rightarrow C_{n-1} = \begin{cases} 0, & i < n, \\ \partial, & i = n. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} (\Delta_{\text{inj}})^{\text{op}} & \xrightarrow{F(C)_\bullet} & \mathbf{Ab} \\ \downarrow i & \nearrow \text{Lan}_i F(C)_\bullet & \\ \Delta^{\text{op}} & & \end{array}$$

Определение 7. Граница n -симплексов

$$Z_n(X) = \{x \in X_n \mid d_i(x) = 0 \ \forall i \leq n\}.$$

Два n -симплекса $x, x' \in Z_n(X)$ будем называть гомотопными и обозначать $x \sim x'$, если $\exists y \in X_{n+1}$, что

$$\begin{cases} d_{n+1}y = x, \\ d_n y = x', \\ d_i y = 0, \quad 0 \leq i < n. \end{cases} \quad (1)$$

При этом y будем называть гомотопией и обозначать $y : x \sim x'$.

Определим n -ую гомотопическую группу как

$$\pi_n(X) = Z_n(X) / \sim.$$

Теорема 8. Построенные функторы переводят группы гомологий в гомотопические группы и наоборот.

Определение 9 (Инволютивная система факторизации). Систему факторизации $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ будем называть инволютивной, если существует $(-)^* : \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$, такой что:

1. $ee^* = 1$, а e^*e формируют множество \mathcal{E} -проекторов.
2. $\forall (m : A \rightarrow B) \in \mathcal{M} \ \forall \varphi \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(A) \ \exists \psi \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(B) : m\varphi = \psi m$.
3. $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(A)$ конечно.

Определение 10. Изображение $m : A \rightarrow B \in \mathcal{M}$ будем называть существенным, если id_B является единственным элементом $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(B)$, который сохраняет m , т. е.

$$\varphi m = m, \quad \varphi \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(B) \implies \varphi = \text{id}_B.$$

Пример 11 (Категория Δ). \mathcal{E} — сюръекции, \mathcal{M} — инъекции, звездочку определим так: каждой сюръекции $e : [m] \twoheadrightarrow [n]$ сопоставляем максимальную секцию $e^* : [n] \hookrightarrow [m]$ (то есть каждому элементу $j \in [n]$ сопоставляется максимальный прообраз $e^{-1}(j) \in [m]$).

Для оператора вырождения по этому определению получаем $(s^i)^* = d^i$.

Единственным существенным отображением будет d^n .

Несущественные отображения образуют идеал \mathcal{M}_{in} . Можно рассмотреть категорию $\Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M} / \mathcal{M}_{\text{in}}$. В случае Δ имеем следующую картину

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \frown & & \frown & & \frown & \\ [0] & \longrightarrow & [1] & \longrightarrow & [2] & \longrightarrow & [3] \longrightarrow \dots \end{array}$$

$$\text{hom}(\Xi_{\Delta}^{\text{op}}, \mathbf{Ab})_* \simeq \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}).$$

Обозначим $j : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}$, $q : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M} / \mathcal{M}_{\text{in}}$. Имеем следующую сопряженность

$$N : [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{A}] \xrightleftharpoons[\text{Lan}_j]{j^*} [\mathcal{M}^{\text{op}}, \mathcal{A}] \xrightleftharpoons[q^*]{\text{Ran}_q} [\Xi_{\mathcal{C}}^{\text{op}}, \mathcal{A}]_* : L$$