

# Соответствие Дольда-Кана

Даня Кузаков

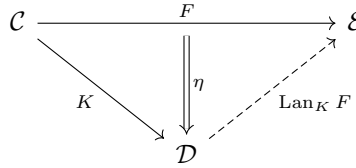
Июль 2023

**Определение 1.** Категория  $\Delta$  состоит из ординалов  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ , морфизмы — отображения, сохраняющие порядок ( $i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$ ).

Симплициальное множество — это контравариантный функтор  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

**Пример 2.** Нерв категории  $N(C)_n = \text{Func}([n], C)$ .

**Определение 3.** Пусть у нас есть функторы  $F : C \rightarrow E$ ,  $K : C \rightarrow D$ , тогда левым расширением Кана  $F$  вдоль  $K$  называют функтор  $\text{Lan}_K F : D \rightarrow E$  вместе с естественным преобразованием  $\eta : F \Rightarrow \text{Lan}_K F \cdot K$ , универсальным среди стрелок из  $F$  в  $E^D$ .

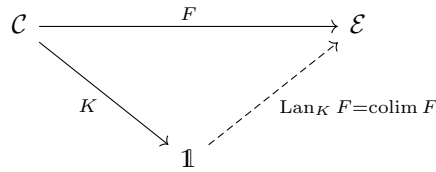


Универсальность понимается в следующем смысле. Для любой пары, состоящей из функтора  $G : D \rightarrow E$  и естественного преобразования  $\gamma : F \rightarrow G \cdot K$ , имеется единственное естественное преобразование  $\alpha : \text{Lan}_K F \rightarrow G$  такое, что для естественных преобразований выполнено равенство  $\gamma = \alpha_K \cdot \eta$ .

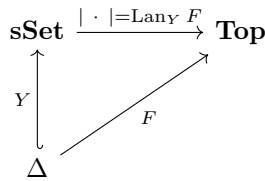
Таким образом, соответствие  $\alpha \mapsto \alpha_K \cdot \eta$  определяет сопряжение функторов

$$\mathcal{E}^D(\text{Lan}_K F, G) \simeq \mathcal{E}^C(F, G \cdot K).$$

**Пример 4.** Копредел является левым расширением Кана.



Функтор геометрической реализации симплициального множества является левым расширением Кана.



**Определение 5.** Пусть  $A_\bullet$  — симплициальная абелева группа. Определим нормализованный комплекс  $NA_\bullet$  следующим образом

$$NA_n = \bigcap_{i < n} \ker d_i, \quad \partial = (-1)^n d_n : NA_n \rightarrow NA_{n-1}.$$

**Теорема 6** (Соответствие Дольда-Кана). Функтор  $N : \mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$  определяет эквивалентность соответствующих категорий.

Функтор в обратную сторону

$$C_* \in \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}), \quad F(C)_\bullet : (\Delta_{\text{inj}})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad F(C)_n = C_n, \quad d_i : C_n \rightarrow C_{n-1} = \begin{cases} 0, & i < n, \\ \partial, & i = n. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} (\Delta_{\text{inj}})^{\text{op}} & \xrightarrow{F(C)_\bullet} & \mathbf{Ab} \\ \downarrow i & \nearrow \text{Lan}_i F(C)_\bullet & \\ \Delta^{\text{op}} & & \end{array}$$

**Определение 7.** Граница  $n$ -симплексов

$$Z_n(X) = \{x \in X_n \mid d_i(x) = 0 \ \forall i \leq n\}.$$

Два  $n$ -симплекса  $x, x' \in Z_n(X)$  будем называть гомотопными и обозначать  $x \sim x'$ , если  $\exists y \in X_{n+1}$ , что

$$\begin{cases} d_{n+1}y = x, \\ d_n y = x', \\ d_i y = 0, \quad 0 \leq i < n. \end{cases} \quad (1)$$

При этом  $y$  будем называть гомотопией и обозначать  $y : x \sim x'$ .

Определим  $n$ -ую гомотопическую группу как

$$\pi_n(X) = Z_n(X) / \sim.$$

**Теорема 8.** Построенные функторы переводят группы гомологий в гомотопические группы и наоборот.

**Определение 9** (Инволютивная система факторизации). Систему факторизации  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  будем называть инволютивной, если существует  $(-)^* : \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{M}$ , такой что:

1.  $ee^* = 1$ , а  $e^*e$  формируют множество  $\mathcal{E}$ -проекторов.
2.  $\forall (m : A \rightarrow B) \in \mathcal{M} \ \forall \varphi \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(A) \ \exists \psi \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(B) : m\varphi = \psi m$ .
3.  $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(A)$  конечно.

**Определение 10.** Отображение  $m : A \rightarrow B \in \mathcal{M}$  будем называть существенным, если  $\text{id}_B$  является единственным элементом  $\text{Proj}_{\mathcal{E}}(B)$ , который сохраняет  $m$ , т. е.

$$\varphi m = m, \quad \varphi \in \text{Proj}_{\mathcal{E}}(B) \implies \varphi = \text{id}_B.$$

**Пример 11** (Категория  $\Delta$ ).  $\mathcal{E}$  — сюръекции,  $\mathcal{M}$  — инъекции, звездочку определим так: каждой сюръекции  $e : [m] \twoheadrightarrow [n]$  сопоставляем максимальную секцию  $e^* : [n] \hookrightarrow [m]$  (то есть каждому элементу  $j \in [n]$  сопоставляется максимальный прообраз  $e^{-1}(j) \in [m]$ ).

Для оператора вырождения по этому определению получаем  $(s^i)^* = d^i$ .

Единственным существенным отображением будет  $d^n$ .

Несущественные отображения образуют идеал  $\mathcal{M}_{\text{in}}$ . Можно рассмотреть категорию  $\Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M} / \mathcal{M}_{\text{in}}$ . В случае  $\Delta$  имеем следующую картину

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \frown & & \frown & & \frown & \\ [0] & \longrightarrow & [1] & \longrightarrow & [2] & \longrightarrow & [3] \longrightarrow \dots \end{array}$$

$$\text{hom}(\Xi_{\Delta}^{\text{op}}, \mathbf{Ab})_* \simeq \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}).$$

Обозначим  $j : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}$ ,  $q : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M} / \mathcal{M}_{\text{in}}$ . Имеем следующую сопряженность

$$N : [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{A}] \xrightleftharpoons[\text{Lan}_j]{j^*} [\mathcal{M}^{\text{op}}, \mathcal{A}] \xrightleftharpoons[q^*]{\text{Ran}_q} [\Xi_{\mathcal{C}}^{\text{op}}, \mathcal{A}]_* : L$$