Соответствие Дольда-Кана

Даня Кузаков

Июль 2023

Определение 1. *Категория Δ состоит из ординалов $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, морфизмы — отображения, сохраняющие порядок ($i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$).*
Симплициальное множество — это контравариантный функтор $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Пример 2. *Нерв категории $N(C)_n = \mathrm{Func}(\underline{[n]}, C)$.*

Определение 3. *Пусть у нас есть функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, тогда левым расширением Кана F вдоль K называют функтор $\mathrm{Lan}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ вместе с естественным преобразованием $\eta : F \Rightarrow \mathrm{Lan}_K F \cdot K$, универсальным среди стрелок из F в $\mathcal{E}^{\mathcal{D}}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "K"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Lan}_K F"'] &
\end{tikzcd}$$

Универсальность понимается в следующем смысле. Для любой пары, состоящей из функтора $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ и естественного преобразования $\gamma : F \to G \cdot K$, имеется единственное естественное преобразование $\alpha : \mathrm{Lan}_K F \to G$ такое, что для естественных преобразований выполнено равенство $\gamma = \alpha_K \cdot \eta$.

Таким образом, соответствие $\alpha \mapsto \alpha K \cdot \eta$ определяет *сопряжение функторов*

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(\mathrm{Lan}_K F, G) \simeq \mathcal{E}^{\mathcal{C}}(F, G \cdot K).$$

Пример 4. *Копредел является левым расширением Кана.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "K"'] & & \mathcal{E} \\
& \mathbb{1} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Lan}_K F = \mathrm{colim}\, F"'] &
\end{tikzcd}$$

Функтор *геометрической реализации* симплициального множества является левым расширением Кана.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{sSet} \arrow[r, "|\cdot| = \mathrm{Lan}_Y F"] & \mathbf{Top} \\
\Delta \arrow[u, hook, "Y"] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Определение 5. *Пусть $A_\bullet$ — симплициальная абелева группа. Определим нормализованный комплекс NA_* следующим образом*

$$NA_n = \bigcap_{i<n} \ker d_i, \quad \partial = (-1)^n d_n : NA_n \to NA_{n-1}.$$

Теорема 6 (Соответствие Дольда-Кана). *Функтор $N : \mathbf{sAb} \to \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab})$ определяет эквивалентность соответствующих категорий.*

Функтор в обратную сторону

$$C_* \in \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}),\quad F(C)_\bullet : (\Delta_{\mathrm{inj}})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab},\quad F(C)_n = C_n,\quad d_i : C_n \to C_{n-1} = \begin{cases} 0, & i < n, \\ \partial, & i = n. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
(\Delta_{\mathrm{inj}})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "F(C)_\bullet"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathbf{Ab} \\
\Delta^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Lan}_i F(C)_\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

Определение 7. *Граница n-симплексов*

$$Z_n(X) = \{x \in X_n \mid d_i(x) = 0 \ \forall i \le n\}.$$

Два n-симплекса $x, x' \in Z_n(X)$ будем называть гомотопными и обозначать $x \sim x'$, если $\exists y \in X_{n+1}$, что

$$\begin{cases} d_{n+1} y = x, \\ d_n y = x', \\ d_i y = 0, \ 0 \le i < n. \end{cases} \tag{1}$$

При этом y будем называть гомотопией и обозначать $y : x \sim x'$.
Определим n-ую гомотопическую группу как

$$\pi_n(X) = Z_n(X)/\sim.$$

Теорема 8. *Построенные функторы переводят группы гомологий в гомотопические группы и наоборот.*

Определение 9 (Инволютивная система факторизации)**.** *Систему факторизации $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ будем называть инволютивной, если существует $(-)^* : \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}$, такой что:*

1. *$ee^* = 1$, а e^*e формируют множество $\mathcal{E}$-проекторов.*
2. *$\forall\ (m : A \to B) \in \mathcal{M}\ \forall \varphi \in \mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(A)\ \exists \psi \in \mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(B) : m\varphi = \psi m$.*
3. *$\mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(A)$ конечно.*

Определение 10. *Отображение $m : A \to B \in \mathcal{M}$ будем называть существенным, если id_B является единственным элементом $\mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(B)$, который сохраняет m, т. е.*

$$\varphi m = m,\ \varphi \in \mathrm{Proj}_{\mathcal{E}}(B) \Longrightarrow \varphi = \mathrm{id}_B.$$

Пример 11 (Категория Δ)**.** *$\mathcal{E}$ — сюръекции, $\mathcal{M}$ — инъекции, звездочку определим так: каждой сюръекции $e : [m] \twoheadrightarrow [n]$ сопостовляем максимальную секцию $e^* : [n] \hookrightarrow [m]$ (то есть каждому элементы $j \in [n]$ сопоставляется максимальный прообраз $e^{-1}(j) \in [m]$).*
Для оператора вырождения по этому определению получаем $(s^i)^* = d^i$.
Единственным существенным отображением будет d^n.

Несущественные отображения образуют идеал $\mathcal{M}_{\mathrm{in}}$. Можно рассмотреть категорию $\Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\mathrm{in}}$. В случае Δ имеем следующую картину

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & {[1]} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & {[2]} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & {[3]} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$\hom(\Xi_\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab})_* \simeq \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}).$$

Обозначим $j : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{C}$, $q : \mathcal{M} \twoheadrightarrow \Xi_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\mathrm{in}}$. Имеем следующую сопряженность

$$N : [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}] \underset{\mathrm{Lan}_j}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} [\mathcal{M}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}] \underset{q^*}{\overset{\mathrm{Ran}_q}{\rightleftarrows}} [\Xi_{\mathcal{C}}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}]_* : L$$