Фильтры и несеквенциальные топологии.

Определение. Пусть X – произвольное множество, β_X – набор подмножеств X. Будем говорить, что β_X – ***фильтр***, если:

1. $\varnothing \notin \beta_X$;
2. $U \in \beta_X,\, V \in \beta_X \Rightarrow \exists W \subset U \bigcap V, \quad W \in \beta_X$;
3. $U \in \beta_X,\, U \subset V \subset X \Rightarrow V \in \beta_X$.

(X, β_X) будем называть ***пространством с фильтром***.

Отображение $f:(X,\beta_X) \to (Y,\beta_Y)$ называется ***сходящимся*** относительно фильтров β_X и β_Y, если $\forall V \in \beta_Y \quad \exists U \in \beta_X: \ f(U) \subset V$.

Определение. Пусть β_Y – фильтр на множестве Y, y_0 – произвольная точка топологического пространства Y. Фильтр β_Y называется ***сходящимся к точке*** y_o, если он не слабее фильтра окрестностей этой точки $O_Y(y_0)$; $\quad y_0$ называется ***пределом*** фильтра β_Y.

Простое сопоставление определений устанавливает связь между сходимостью отображения относительно фильтра и сходимостью фильтра. Например, легко видеть, что отображение не может сходиться относительно расходящегося фильтра, предельные точки фильтра и отображения относительно данного фильтра и количество пределов фильтра и отображения совпадают. Простые утверждения демонстрируют взаимосвязь, давая условия (в том числе необходимые и достаточные) для хаусдорфовости и компактности топологического пространства.

Утверждение. *Пусть (X,β_X) – пространство с фильтром, Y – топологическое пространство, $f : X \to Y$ – произвольное отображение, сходящееся относительно β_X и β_Y, где β_Y – некоторый фильтр на Y. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Y – хаусдорфово;*
2. *Всякий фильтр β_Y имеет в Y единственный предел;*
3. *Всякая функция $g : Y \to Y$, сходящаяся относительно β_Y и фильтра окрестностей точки p $O_Y(p)$, имеет единственный предел, равный p;*
4. *Если отображение $f : X \to Y$ сходится по β_X и β_Y, где β_Y не слабее фильтр окрестностей $O_Y(p)$, то f имеет единственный предел, равный p.*

Утверждение. *Пусть (X,β_X) – пространство с фильтром, Y – хаусдорфово топологическое пространство, $f: X \to Y$ и f переводит последовательности $\{x_n\} \in X$, сходящиеся по β_X, в последовательности $\{f(x_n)\} \in Y$, сходящиеся по β_Y. Тогда f сходится относительно β_X и имеет единственный предел.*

Утверждение. *Пусть (X, β_X), (Y, β_Y) – топологические пространства, $\beta_X = U \setminus S$, где U – открытые множества стандартной топологии на $\mathbb{R}$, S – произвольные счётные подмножества X, $\{x_n\} \in X$ – произвольная последовательность. Тогда $\{x_n\}$ сходится относительно β_X тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ стабилизирующаяся.*

Таким образом, топология на X, задаваемая β_X, не является секвенциальной, а само полученное пространство – секвенциально компактным, так как умеем каждую последовательность превращать в расходящуюся, беря в качестве S требуемые счётные подмножества.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f \colon X \to \mathbb{R}$ и p – предельная точка X.

По критерию Гейне функция f имеет предел b при $x \to p$, если $\forall \{x_n\} \in X$, $\{x_n\} \to p$ и $x_n \neq p$ верно, что $f(x_n) \to b$.

То есть всякая последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к p и тождественно не равная p, переходит в сходящуюся последовательность $\{f(x_n)\}$. Пусть теперь $\mathbb{R}_\beta$ – числовая прямая с фильтром, аналогичным фильтру из предыдущего утверждения,

$$f \colon \mathbb{R}_\beta \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Тогда $\forall \{x_n\} \in \mathbb{R}_\beta$ имеет предел p тогда и только тогда, когда $\exists N : \forall n > N \quad x_n \equiv p$. Таким образом, при $x_n \underset{\beta}{\to} 0 \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ – т.е. нарушается критерий Гейне.

Утверждение. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на нём имеет точку касания.*

Утверждение. *Простанство ультрафильтров βX с естественной топологией (в качестве базы топологии берутся надмножества $A' = p \in \beta X : A \in p, A \subset X$, A' – окрестность ультрафильтра $p \in \beta X \Leftrightarrow A \in p$ пространства X и βX, отождествляются как $x \equiv p_x$) компактно и хаусдорфово.*

Отступление про компактификации.

Утверждение. *Пусть K – компакт, $C^0(K)$ – кольцо непрерывных функций $f : K \to \mathbb{R}$. Тогда всякий максимальный идеал $I \subset C^0(K)$ имеет вид $ker(ev_p)$, где $ev_p : f \mapsto f(p)$, $p \in K$.*