КРИВИЗНА СХОУТЕНА В ГЕОМЕТРИИ САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Николай Каренин

Преамбула. При рассмотрении нормальных почти контактных метрических многообразий, т.е. Сасакиевых многообразий, в качестве локального инварианта целесообразно принять тензор, отличный от тензора кривизны Римана, но являющийся более естественным при работе с геометрией контактного распределения. В связи с чем можно полностью отказаться от использования риманова тензора кривизны, который неприменим для работы со связностями с кручением, которые возникают при решении задач современной физики.

Тензор кривизны Схоутена. Тензором, способным заменить тензор кривизны Римана, является тензор кривизны Схоутена, введённый сначала Схоутеном, а затем изучавшийся и доработанный В.В. Вагнером. Математически, это есть отображение $S : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, задаваемое следующей формулой

$$S(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]}Z - P[Q[X, Y], Z],$$

где P, Q – проекции TM на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^\perp$, соответсвенно, $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp = TM$.

Сасакиевы пространственные формы. Если на нормальном почти контактном метрическом многообразии риманова φ-секционная кривизна постоянна и равна κ, т.е. речь идёт о сасакиевых пространственных формах, то тензор кривизны Римана R имеет следующее выражение

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}(\kappa+3)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] - \frac{1}{4}(\kappa-1)[\eta(Y)\eta(Z)X-$$

$$-\eta(X)\eta(Z)Y + g(Y,Z)\eta(X)\xi - g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(\varphi Y, Z)\varphi X+$$

$$+g(\varphi Y, Z)\varphi Y) + 2g(\varphi X, Y)\varphi Z].$$

Кривизна Схоутена и Римана могут быть выражены одна через другую при помощи некоторого соотношения.

Основная идея изучения Сасакиевой геометрии в таком ключе состоит в том, что тензор кривизны Схоутена в геометрии почти контактных метрических многообразий (и в частности, многообразий Сасаки) является объектом, более фундаментальным, чем тензор кривизны Римана.

Основная задача. Необходимо удостовериться в том, насколько два понятия кривизны соотносятся, а именно, требуется установить связь между классификациями сасакиевых многообразий, где центральным объектом является тензор Римана и где тензор Схоутена.