МОТИВНЫЙ СПЕКТР УОЛЛА

ЕГОР ЗОЛОТАРЕВ

Краткое описание. Одно из первых исторических применений стабильной теории гомотопий – вычисление различных групп (ко)бордизмов (неориентированных, ориентированых, унитарных, ...) с помощью теоремы Понтрягина–Тома. При этом, вычисление ориентированных и специальных унитарных кобордизмов основано на анализе вещественных и комплексных σ_1–ограниченных кобордизмов, которые представляются вещественным $\mathsf{W}(\mathbb{R})$ и комплексным $\mathsf{W}(\mathbb{C})$ спектрами Уолла соответственно [St].

В работе строится и изучается мотивный аналог спектров Уолла, который является объектом в стабильной $\mathbb{A}^1$–гомотопической категории Мореля–Воеводского $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$ [Mor], [MV]. При этом данный спектр задается явной геометрической конструкцией.

А именно, строится мотивный симметрический спектр W, который снабжается естественной стуктурой MSL–модуля, с естественными морфизмами MSL–модулей $\mathsf{MSL} \to \mathsf{W} \to \mathsf{MGL}$ (здесь MGL–спектр алгебраических кобордизмов Воеводского, а MSL–спектр ориентированных алгебраических кобордизмов [PW]).

При этом данный спектр отождествляется (после обращения экспоненциальной характеристики поля) с конусом некоторого морфизма $\eta : \Sigma^{1,1}\mathsf{MSL} \to \mathsf{MSL}$, который соответствует алгебраическому отображению Хопфа. Кроме того, доказывается, что существует расщепимый выделенный треугольник $\mathsf{W} \to \mathsf{MGL} \xrightarrow{\Delta} \Sigma^{4,2}\mathsf{MGL}$ в $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$, где Δ–когомологическая операция, описанная в терминах характеристических классов.

Базовые определения. Зафиксируем некоторое базовое совершенное поле k. Будем обозначать категорию гладких многообразий над k через Sm_k. Следующее определение является основным для мотивной теории гомотопий (для определения топологии Нисневича см.[MV]).

Определение. Пунктированным мотивным пространством над k будем называть пунктированный симплициальный пучок в топологии Нисневича на Sm_k. Они образуют категорию, которую мы будем обозначать $\mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$.

Заметим, что так как топология Нисневича является субканонической, существует вложение Йонеды $\mathsf{Sm}_\mathsf{k} \to \mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$, которое отображает гладкое многообразие в предствимый им пучок (с добавлением внешней отмеченной точки). Кроме того, данная категория содержит все пунктированные симплициальные множества и имеет структуру моноидальной категории по отношению к смэш-произведению мотивных пространств.

На $\mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$ существует структура моноидальной симплициальной модельной категории, слабые эквивалентности которой порождены морфизмами вида $X \times \mathbb{A}^1 \to X$, где $X \in \mathsf{Sm}_{\mathsf{k}}$. Соответствующая гомотопическая категория $\mathsf{H}_*(\mathsf{k}) := Ho(\mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*})$ называется *нестабильной мотивной гомотопической категорией.*

Определение. *Стабильной мотивной гомотопической категорией* называется $\mathbb{P}^1$–стабилизация категории $\mathsf{H}_*(\mathsf{k})$ (которая является гомотопической категорией от модельной категории $\mathbb{P}^1$–спектров) и обозначается $\mathsf{SH}(\mathsf{k}) := \mathsf{H}_*(\mathsf{k})[(\wedge\mathbb{P}^1)^{-1}]$.

Категория $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$ обладает структурой симметрической моноидальной триангулированной категории. При этом многие известные когомологические инварианты представляются в данной категории (группы Чжоу, мотивные когомологии, алгебраическая K-теория, эрмитова K-теория, алгебраические кобордизмы,...).

Кострукция и основные результаты. Для построения спектра W обозначим через $\mathsf{Gr_n} := \mathsf{colim}(\mathsf{Gr_n}(\mathbb{A}^m)) \in \mathsf{Spc}_{\mathsf{k},*}$ грассманиан n–мерных подпространств в $\mathbb{A}^\infty$. Над $\mathsf{Gr_n}$ весит тавтологическое векторное расслоение $\gamma_n \to \mathsf{Gr_n}$. Рассмотрим векторное расслоение $\mathsf{det}(\gamma_n \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ над произведением $\mathsf{Gr_n} \times \mathbb{P}^1$ и обозначим через $\mathsf{WGr_n}$ дополнение к нулевому сечению данного расслоения $\mathsf{WGr_n} := \mathsf{det}(\gamma_n \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))^o$. Обозначим через γ_n^W пулбэк тавтологического расслоения вдоль проекции $\mathsf{WGr_n} \to \mathsf{Gr_n}$.

Определение. *Мотивный спектр Уолла* W состоит из пространств Тома $\mathsf{W}_n := \mathsf{Th}(\gamma_n^W) = \gamma_n^W/(\gamma_n^W)^o$ и естественных структурных отображений индуцированных вложениями грассманианов.

Легко видеть из определения спектра W, что существуют естественные морфизмы $\mathsf{MSL} \to \mathsf{W} \to \mathsf{MGL}$. В отличии от других спектров Тома, таких как MGL, MSL и MSp, на спектре Уолла не существует естественной кольцевой структуры, однако существует естественное действие MSL. Следующее утверждение получается конструкцией соответствующего мотивного симметрического спектра.

Утверждение. *На спектре* W *существует естественная структура* MSL–*модуля. При этом морфизмы* $\mathsf{MSL} \to \mathsf{W} \to \mathsf{MGL}$ *являются морфизмами* MSL–*модулей.*

Для формулировки следующего результата напомним, что *алгебраическим отображением Хопфа* называется проекция $H : \mathbb{A}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}^1$. Так как $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ и $\mathbb{P}^1$ являются мотивными сферами денадстройка H определяет некоторый элемент η в гомотопических группах мотивного сферического спектра.

Теорема. *Существует эквивалентность* MSL*–модулей* $(\mathsf{MSL}/\eta)[\frac{1}{e}] \xrightarrow{\simeq} \mathsf{W}[\frac{1}{e}]$, *где* $\mathsf{MSL}/\eta := \mathsf{Cone}(\Sigma^{1,1}\mathsf{MSL} \xrightarrow{\eta} \mathsf{MSL})$*, а* e*–экспоненциальная характеристика поля* k.

Напомним, что MGL–когомологические операции описываются через характеристические классы $\mathsf{MGL}^{*,*}(\mathsf{MGL}) \cong \mathsf{MGL}^{*,*}[[c_1, c_2, \dots]]$.

Теорема. *Существует выделенный треугольник* $\mathsf{W}[\frac{1}{e}] \to \mathsf{MGL}[\frac{1}{e}] \xrightarrow{\Delta[\frac{1}{e}]} \Sigma^{4,2}\mathsf{MGL}[\frac{1}{e}]$ *в* $\mathsf{SH}(\mathsf{k})$*, где* $\Delta \in \mathsf{MGL}^{4,2}(\mathsf{MGL})$ *когомологическая операция соответствующая классу* $c_1(det) \smile c_1(det^*)$.

Выделенный треугольник из теоремы выше является (неканонически) расщепимым. Это позволяет вывести следующее следствие, которое показывает, что в универсальном случае разница между SL и GL ориентациями контролируется стабильным мотивным элементом Хопфа.

Следствие. *На спектре* $(\mathsf{MSL}/\eta)[\frac{1}{e}]$ *существует структура кольцевого ориентированного мотивного спектра.*

Дальнейшие планы. В будущем планируется применить полученные результаты для вычисления "геометрической части" MSL-кобордизмов, которая известна на данный момент только после обращения η в гомотопических группах MSL, см.[BH].

Список литературы

[BH] T. Bachmann, M. Hopkins, *η–periodic motivic stable homotopy theory over fields*, arXiv:2005.06778

[Mor] F. Morel, *An introduction to $\mathbb{A}^1$–homotopy theory*, Contemporary developments in algebraic K-theory, ICTP Lect. Notes XV (2004), 357–441

[MV] F. Morel, V. Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHES, 90 (1999), 45–143

[PW] I. Panin, C. Walter, *On the algebraic cobordism spectra* MSL *and* MSp, Algebra i Analiz, 34:1 (2022), 144–187

[St] R. E. Stong, *Notes on cobordism theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1968

[Zol] E. Zolotarev, *Motivic Wall spectrum*, work in progress

Санкт–Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, 191023, Санкт–Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, Россия

Email address: `zolotarev-egv@yandex.ru`