Об одном алгебраическом подходе в дифференциальных уравнениях

Роман Елисеев

Системы дифференциальных уравнений и $\mathcal{D}$-модули. Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений

$$Pu = v$$

Мы не предполагаем, что число неизвестных функций k совпадает с числом уравнений m;
В качестве примера рассмотрим систему

$$(*) \frac{\partial u}{\partial x^1} = v_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x^2} = v_2, \quad x = \left(x^1, x^2\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Дифференцируя первое уравнение по x^2, а второе - по x^1, получаем дифференциальные следствия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial v_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial v_2}{\partial x^1},$$

а из них - дифференциальное условие согласования

$$(**) \frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} = 0.$$

В силу леммы Пуанкаре условие (**) является необходимым и достаточным условием разрешимости системы (*); поэтому в данном случае ясно, что никаких дифференциальных условий согласования, не выводимых из (**), не существует. Однако в общем случае дело обстоит не так просто, и возникает вопрос о том, как выписать полную систему условий согласования (и конечна ли она). Здесь оказывается полезным встать на «алгебраическую» точку зрения. Каждое условие согласования можно задавать матрицей-строкой $\widetilde{Q} = \left(\widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_m\right)$ дифференциальных операторов, так что само условие имеет вид

$$(***) \tilde{Q} v = \tilde{Q}_1 v_1 + \cdots + \tilde{Q}_m v_m = 0.$$

При этом соотношение (***) является дифференциальным условием согласования для исходной системы тогда и только тогда, когда

$$\tilde{Q} P = 0$$

Это был несложный пример того, как естественным образом возникают алгебраические структуры в дифференциальных уравнениях.

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть X - комплексноаналитическое многообразие. Требуется продолжить решение дифференциального уравнения $Pu = f$, где P - голоморфный дифференциальный оператор на X, из некоторой области $\Omega_0 \subset X$ в более широкую область $\Omega_1 \subset X$. Будем продолжать решение «постепенно», деформируя область Ω_0 к Ω_1 через семейство $\Omega_t, t \in [0, 1]$. Оказывается, что если конормаль к границе области Ω_t не проходит через «запрещенные направления» ни при каком $t \in [0,1]$, то решение можно продолжить из Ω_0 в Ω_1. Более точно, пусть $\sigma(P)-$ главный символ оператора P, а

$$\operatorname{char}(P)=\left\{(x, \xi) \in T^{*} X: \sigma(P)(x, \xi)=0\right\}$$

- множество характеристических векторов оператора P. Тогда запрещенные направления - это в точности направления характеристических векторов.

Естественной формализацией «запрещенных направлений» на языке пучков является понятие микроносителя. Микроноситель пучка $\mathcal{F}$ - это замкнутое подмножество

$$\mathrm{SS}(\mathcal{F}) \subset T^{*} X$$

определяемое следующим образом: пусть $\Phi \in C^{1}(X)-$ вещественная функция; тогда $\left(x_{0}, d \Phi\left(x_{0}\right)\right) \notin \mathrm{SS}(\mathcal{F})$, если когомологии пучка $\mathcal{F}$ с носителями в $\left\{x: \Phi(x) \geq \Phi\left(x_{0}\right)\right\}$ тривиальны в точке x_{0}.

Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ - когерентный $\mathcal{D}_{X}$-модуль на комплексно-аналитическом многообразии X и пусть $\mathcal{F}$ - комплекс решений модуля $\mathcal{M}$. Тогда

$$\mathrm{SS}(\mathcal{F})=\operatorname{char}(\mathcal{M})$$

где $\operatorname{char}(\mathcal{M})$ - характеристическое многообразие модуля $\mathcal{M}$. Теперь приведем таблицу соответсвия между стандартными понятиями в теории дифференциальных уравнений и их аналогами в теории D-модулей.

Традиционный подход		Подход, связанный с теорией D-модулей
Система дифференциальных уравнений $PU=v$	$\leftrightarrow$	D-модуль $\mathcal{M}=\mathcal{D}^{k} /\left(\mathcal{D}^{m} P\right)$
Дифференциальные условия согласования на правые части $Qv=0$	$\leftrightarrow$	Второй член свободной резольвенты $\mathcal{D}^{\boldsymbol{s}} \xrightarrow{Q} \mathcal{D}^{\mathbf{m}} \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \mathcal{D}^{k} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$
Пространство $\operatorname{Ker} P$ решений однородного уравнения	$\leftrightarrow$	$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ – класс функций, в котором рассматривается уравнение
Коядро оператора P в пространстве правых частей, удовлетворяюших условию согласования, Coker $P=\{v \mid Qv=0\} /\{v \mid v=Pu\}$	$\leftrightarrow$	$\operatorname{Ext}_{\mathcal{D}}^{1}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$
Характеристики char P	$\leftrightarrow$	Характеристическое многообразие char $\mathcal{M}$ модуля $\mathcal{M}$
Гамильтониан H оператора P	$\leftrightarrow$	Характеристический идеал $\operatorname{Icar}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{O}\left(T^{*} X\right)$
Бихарактернстики и системы Гамильтона	$\leftrightarrow$	Бихарактеристические листы и инволютивные распределения
Начальные данные в задаче Коши и условия согласования на них	$\leftrightarrow$	Индуцированная система $\mathcal{M}_{\boldsymbol{Y}}$
Волновой фронт решения	$\leftrightarrow$	Микроноситель $\mathrm{SS}(\mathcal{F})$ пучка решений $\mathcal{F}$