Гладкие кубические поверхности над конечными полями характеристики 2

АНАСТАСИЯ В.ВИКУЛОВА

В работах[1, §9.5.3] и [2] была приведена полная классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями произвольной характеристики. Тем не менее, остается открытым вопрос о группах автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Более того, для заданной группы автоморфизмов также является небезынтересным вопрос о количестве таких гладких кубических поверхностей с точностью до изоморфизма, чья группа автоморфизмов совпадает с данной.

Для конечных полей характеристики 2 известны ответы на заданные вопросы. А именно, в работе [3] была доказана следующая теорема для гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_2$:

Теорема 1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда порядок ее группы автоморфизмов удовлетворяет неравенству*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Если равенство выполнено, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$. Более того, гладкая кубика с группой автоморфизмов S_6 единственна с точностью до изоморфизма.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие результаты:

Теорема 2. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Если $|\mathrm{Aut}(S)| = 720$, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.*

Доказательство теоремы 2 основано на изучении подгрупп в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ и в группе $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$. Предъявим явно кубическую поверхность с группой автоморфизмов S_6.

Пример 1. Рассмотрим кубику $S \subset \mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, заданную уравнением

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что это уравнение задает гладкую кубику. Более того, она проходит через все точки на $\mathbb{P}^3$. Покажем, что $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$. Рассмотрим матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует кососимметрической билинейной форме. Группа, сохраняющая эту матрицу, есть группа $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{S}_6$. Левая часть уравнения (1) равна $(x^2, y^2, z^2, t^2)^T\Omega(x, y, z, t)$. Значит, группа S_6 содержится в группе автоморфизмов кубики S. По теореме 2 группа S_6 является максимальной возможной группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности над $\mathbb{F}_2$. Значит, $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.

Отметим, что кубика (1) рациональна. В самом деле, на ней есть две непересекающиеся прямые l_1 и l_2, задающиеся уравнениями $x = y = 0$ и $z = t = 0$, соответственно, что и дает бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow S$.

Лемма 1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящая через все 15 точек в $\mathbb{P}^3$. Тогда S изоморфна кубике вида (1), и ее группой автоморфизмов является группа S_6.*

Доказательство. Заметим, что всего кубик, проходящих через все 15 точек, ровно 63. Рассмотрим действие группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ на гладкие кубики в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящие через 15 точек. Пусть $\mathrm{Orb}(S)$ — орбита S действия группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$. Имеем, $|\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)| = |\mathrm{Orb}(S)| \cdot |\mathrm{Aut}(S)|$. Рассмотрим особую кубическую поверхность, которая является объединением трех плоскостей в $\mathbb{P}^3$, пересекающихся одновременно в одной прямой. Ясно, что на такой приводимой кубической поверхности будет 15 точек. В $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$ имеется ровно 35 прямых. То есть гладких кубик, проходящих через 15 точек, не более 28. Получаем, что $|\mathrm{Orb}(S)| \leqslant 28$. Тогда имеем неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \geqslant 720$, что возможно, согласно теореме 2, тогда и только тогда когда $\mathrm{Aut}(S) = \mathrm{S}_6$ и $|\mathrm{Orb}(S)| = 28$. Другими словами, все гладкие кубики, проходящие через 15 точек, изоморфны друг другу. И значит, такие кубики изоморфны кубике вида (1). $\square$

Лемма 2. *Пусть группа* S_6 *является группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности* S *над полем* $\mathbb{F}_2$*. Тогда* S *изоморфна кубике вида (1).*

Доказательство. Заметим, что согласно теореме Шевалле–Варнинга на кубике S есть точка, которую мы обозначим p. Действие группы S_6 на S определяет ее действие на $\mathbb{P}^3$. Предположим, что орбита точки p имеет длину $l \neq 5, 10, 15$. Тогда стабилизатор каждой точки в орбите является подгруппой S_6 индекса l. Более того, в стабилизаторе лежит подгруппа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, так как l взаимно просто с 5. Тогда группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ действует нетривиально на касательном пространстве к $\mathbb{P}^3$ в точке p. То есть $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$. Но это невозможно.

Случай $l = 5$ невозможен, так как в группе S_6 нет подгруппы индекса 5. Если же $l = 10$, то на $\mathbb{P}^3$ есть еще орбиты действия S_6 длины не больше 5. Но мы только что показали, что таких нет. Поэтому возможен только случай $l = 15$. Значит, на кубике S с действием группы S_6 ровно 15 точек. А по лемме 1 такие кубики изоморфны кубике (1). $\square$

Из 1 и 2 мы получаем следствие.

Следствие 1. *Группа* S_6 *действует на гладкой кубической поверхности* S *над полем* $\mathbb{F}_2$ *тогда и только тогда, когда* S *проходит через все* 15 *точек в* $\mathbb{P}^3$.

Доказательство теоремы 1. Первая часть теоремы следует из теоремы 2. Существование и единственность следуют из лемм 1 и 2. $\square$

Более того, имеется обобщение этого результата для произвольных конечных полей характеристики 2 :

Теорема 3. *Максимальная по порядку группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности над полем* $\mathbb{F}_{4^k}$ *– это группа* $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$*, а над полем* $\mathbb{F}_{4^k \cdot 2}$ *– это группа* S_6*. Причем в обоих случаях гладкая кубика с данной группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма.*

Список литературы

[1] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry. A modern view*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012

[2] I. Dolgachev, A. Duncan, *Automorphisms of cubic surfaces in positive characteristic*, Izv. RAN. Ser. Mat., **83** (2019), no.3, 15–92.

[3] А. В. Викулова, *Константа Жордана группы Кремоны ранга* 2 *над конечным полем*, Матем. Заметки, **113** (2023), no.4, 607–612.