О 3-порождённых аксиальных алгебрах йорданова типа

Определения

Будем полагать A коммутативной не обязательно ассоциативной алгеброй над полем $\mathbb{F}$.

- Закон слияния (fusion law) - это отображение $\star : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow 2^{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ - конечное подмножество $\mathbf{F}$.
- Элемент $a \in A$ называется полупростым, если оператор умножения на него $ad_a : x \longrightarrow ax$ полупрост.
- $\mathcal{F}$-ось (далее ось, axis) $a \in A$ - это полупростой идемпотент с собственными значениями из $\mathcal{F}$, произведения собственных векторов которого подчинены законам слияния: $A_\lambda A_\mu \subseteq A_{\lambda\star\mu}$
- Ось a примитивна, если $\dim A_1(a) = 1$.
- Примитивная аксиальная алгебра - это не обязательно ассоциативная коммутативная алгебра, порождённая осями. Выделяют аксиальные алгебры йорданова типа с законом слияния $\mathcal{J}(\eta)$ и монстрова типа с $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$.

$*$	1	0
1	1	
0		0

$*$	1	0	η
1	1		η
0		0	η
η	η	η	$1, 0$

$*$	1	0	α	β
1	1		α	β
0		1	α	β
α	α	α	$0, 1$	β
β	β	β	β	$0, 1, \alpha$

Таблица: Законы слияния $\mathcal{A}/\mathcal{J}(\eta)/\mathcal{M}(\alpha, \beta)$

- Форма Фробениуса для аксиальной алгебры - это билинейная форма $(\cdot, \cdot) : A \times A \longrightarrow \mathbb{F}$ со свойством $(a, bc) = (ab, c)$ для любых $a, b, c \in A$.
- Любая аксиальная алгебра йорданова типа имеет единственную форму Фробениуса. (Khasraw, McInroy, Shpectorov, 2019)

Основные теоремы

- Любая 3-порождённая аксиальная алгебра йорданова типа йорданова и вкладывается в универсальную 9-мерную йорданову алгебру (Горшков, Старолетов, 2020).
- Универсальная 9-мерная алгебра $A(\alpha, \beta, \gamma, \psi)$ порождена осями a, b, c такими, что $(a, b) = \alpha, (b, c) = \beta, (a, c) = \gamma, (a, bc) = \psi$. Алгебра $A(\alpha, \beta, \gamma, \psi)$ проста в случае, когда $(\alpha + \beta + \gamma - 2\psi - 1)(\alpha\beta\gamma - \psi^2) \neq 0$. (Горшков, Старолетов, 2020)

Постановка проблемы

- Необходимо описать все возможные идеалы и все фактор-алгебры $A(\alpha, \beta, \gamma, \psi)$ в случаях, когда она непроста.

Результаты

Пусть A полупростая 3-порождённая аксиальная алгебра типа $\mathcal{J}(1/2)$ над полем $\mathbb{F}$, char $\mathbb{F} \neq 2, 3$. Тогда A изоморфна одной из следующих алгебр:

1. $\mathbb{F}^n, n \in \{1, 2, 3\}$
2. $\mathcal{J}Form_3(\mathbb{F})$
3. $\mathbb{F} \oplus \mathcal{J}Form_3(\mathbb{F})$
4. $M_2^+(\mathbb{F})$
5. $H_3^+(\mathbb{F})$

Будущие исследования

- Исследовать возможные идеалы алгебры $A(\alpha, \beta, \gamma, \psi)$.
- Исследовать 3-порождённые алгебры в случае, когда две оси йорданова типа, а одна ось - монстрова типа.

Библиография

- I. Gorshkov, A. Staroletov, On primitive 3-generated axial algebras of Jordan type. J. Algebra, 563:74–99, 2020.
- J. I. Hall, F. Rehren, and S. Shpectorov, Primitive axial algebras of Jordan type. J. Algebra, 437:79–115, 2015.
- J. I. Hall, Y.Segev, and S. Shpectorov, On primitive axial algebras of Jordan type. Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.), 13(4):397–409, 2018.
- S.M.S. Khasraw, J. McInroy, S. Shpectorov, On the structure of axial algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 373:2135-2156, 2020.

Равиль Бильданов

ravilbildanov@gmail.com

Новосибирский государственный университет