О некоторых 3-порожденных группах 6-транспозиций

Афанасьев Всеволод Альбертович
(Основано на совместной работе с А.С. Мамонтовым)
НГУ, Новосибирск

Основные понятия

Определение. Говорят, что группа G является группой n-транспозиций, если G порождена таким множеством D, что

- $x \in D \implies x^2 = e$
- $D^G = D$ (D - нормальное множество).
- $x, y \in D \implies |xy| \leq n$.

Мотивирующий пример: группы перестановок $S_n,\ n > 1$ являются группами 3-транспозиций, при этом знакопеременные группы $A_n,\ n > 1$ являются группами 6-транспозиций.
Еще одним простым классом примеров являются группы диэдра D_{2n}: группы симметрий правильных n-угольников (они порождаются двумя инволюциями, произведение которых имеет порядок n).

Неформально определим алгебры Майорана, впервые рассмотренные в [1]:

1. Это коммутативные алгебры, порожденные осями – идемпотентами, удовлетворяющими некоторым свойствам (например, для оси a относительно оператора ad_a алгебра раскладывается в прямую сумму собственных подпространств, соответствующих $0,\ 1,\ 1/4,\ 1/32$).
2. На них можно задать билинейную форму $(\cdot,\cdot)$, такую, что для любой оси a $(a,a) = 1$ и $(uv, w) = (u, vw)$ для любых элементов алгебры $u,\ v,\ w$.

Данные свойства выполняются в алгебре Грайса, группой автоморфизмов которой является спорадическая группа Монстр $\mathbb{M}$.

Историческая справка

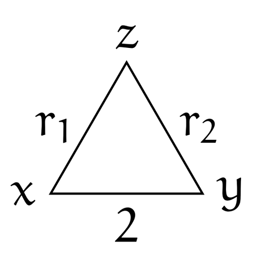
Изучение групп n-транспозиций было начатом Берндом Фишером: им был сделан первый шаг в на данный момент завершенной классификации групп при $n = 3$ [2]. Этот случай является единственным полностью завершенным – для других n известны лишь частичные результаты. При этом известно очень много интересных примеров таких групп, например некоторые конечные специальные унитаные, симплектические и ортогональные группы.
Также самая большая конечная спорадическая простая группа Монстр $\mathbb{M}$ является группой 6-транспозиций, а также Фишером были открыты 3 спорадические группы, носящие его имя.
При этом одной из развиваемых идей в теории групп является взаимодействие с алгебрами, для которых данные группы задают автоморфизмы. Эксплуатация этой связи позволяет как изучать алгебры, используя известную информацию об их симметриях, так и работать с группами, используя некоторые алгебраические конструкции. В частности, группы можно строить как группы автоморфизмов некоторых алгебр.
В работе [3] связь групп 6-транспозиций с довольно интересным классом алгебр выражается в следующем:
Утверждение. любая алгебра Майорана имеет своей группой автоморфизмов группу 6-транспозиций.
(В статье утверждение сформулировано для более широкого класса алгебр).
Таким образом резонной задачей является попытаться классифицировать группы 6-транспозиций и построить алгебры, автоморфизмы которых они задают. В нашей работе рассматривается первый нетривиальный случай этой задачи.

Основные результаты

Основным результатом работы является следующее утверждение: Будем рассматривать 3-порожденные группы 6-транспозиций с коммутирующей парой порождающих, то есть гомоморфные образы групп обладающих следующим представлением:

$$G = \{x, y, z | e = x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (xz)^{r_1} = (yz)^{r_2}\},$$

где $r_1 < 6,\ r_2 \leq 6$.



Теорема Пусть $(r_1, r_2) \neq (6, 6)$. Тогда все 3-порожденные группы 6-транспозиций с коммутирующей парой порождающих конечны и либо являются разрешимыми, либо являются гомоморфными образами одной из следующих групп

Группа	Наименование	(r_1, r_2)
G_1	$PGL(2,9)$	$(4,5)$
G_2	$2 \times ((2^4 : S_5)$	$(4,5)$
G_3	$(A_5 \times A_5) : 2^2$	$(4,6)$
G_4	$2 \times (2^{10} : PSL(2,11))$	$(5,5)$
G_5	$2 \times 2^6 : S_5$	$(4,6)$
G_6	$O_2(G) : A_5$	$(5,5)$
G_7	$2 \times (2^5 : S_6)$	$(5,6)$
G_8	$2 \times 3.S_6$	$(5,6)$
G_9	M_{12}	$(5,6)$
G_{10}	$(2.M_{22}) : 2$	$(5,6)$

Напомним, что $H : N$ обозначает расщепляемое расширение группы H группой N (то же самое, что полупрямое произведение).

Замечание. разрешимые группы также известны, но опущены для краткости.
Для случая $(6, 6)$ также имеются частичные результаты.

Идеи доказательств

В большом числе случаев оказывается полезной Идея. найти подгруппы, похожие на группы 3-транспозиций.
В качестве такой подгруппы можно взять $\langle x^G \rangle$ (нормальное замыкание элемента x). Она всегда оказывается 5 или 6-порожденной.
Данная идея позволяет (добавляя доп. соотношения) разобрать некоторые случаи, однако, когда эта идея становится неприменима (например при $r_1 = r_2 = 5$), либо когда изучать эту подгруппу становится слишком сложно мы применяем программы компьютерной алгебры (используя результаты из теории групп для получения определяющих соотношений).

Выводы и дальнейшие направления исследований

Среди полученных на данный момент групп уже достаточно много интересных примеров, что говорит о полезности продолжения классификации, в то же время сложность работы показывает, что текущие методы для этого трудноприменимы. При этом, эти результаты естественно можно потенциально использовать в дальнейшей работе над классификацией, поскольку в группе 6-транспозиций почти всегда можно найти подгруппу с конфигурацией, соответствующей рассматриваемому нами случаю.
В дальнейшем мы планируем избавиться от условия $r_1 < 6$, а также построить алгебры Майорана, для которых полученные группы задают автоморфизмы. Стоит отметить, что эта задача также обещает быть достаточно трудновыполнимой ввиду принципов работы текущих методов построения этих алгебр (размерность алгебры не меньше числа элементов в множестве D, которое часто оказывается достаточно большим, порой оно содержит более 1000 элементов.)

Список литературы

[1] A.A Ivanov, D.V. Pasechnik, Á. Seress, S.Shpectorov, Majorana representations of the symmetric group of degree 4. Journal of Algebra, 2010, vol. 324, pp. 2432–2463.

[2] Fischer, B. Finite groups generated by 3-transpositions. I. Invent Math 13, 232–246 (1971).

[3] J.I. Hall, F. Rehren, S. Shpectorov, Universal axial algebras and a theorem of Sakuma, Journal of Algebra, Volume 421, 2015, Pages 394-424,

Работа поддержана Математическим центром в Академгородке.