Классы флайп-эквивалентности 2-кривых.
Алешин Артем

ФМКН СПБгУ
2023

1. Введение

1.1. **Мотивация.** В статье [1] предложен новый метод оценки асимптотики роста числа простых узлов. Имеются основания полагать, что, если вместо простых перекрестков вставлять 2-кривые с небольшим числом пересечений, то получится улучшить доказанную в этой статье асимптотику. Целью данной работы была оценка количества 2-кривых с точностью до флайп-эквивалентности для кривых с небольшим числом пересечений.

1.2. **Основные определения.** Зафиксируем квадрат K на плоскости.

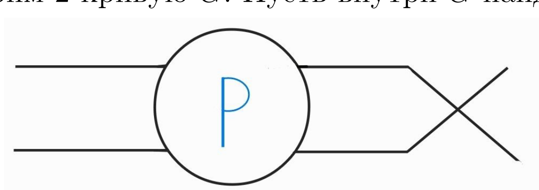
Определение. *1-кривой* общего положения в нашем квадрате будем называть такую гладкую кривую $\gamma : [0, 1] \to K$, что у нее нет особенностей кроме конечного числа двойных точек, все двойные пересечения трансверсальны, и $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ это различные вершины квадрата, причем $\gamma[0, 1] \cap \partial K = \{\gamma(0), \gamma(1)\}$.

Определение. *2-кривой* общего положения будем называть пару таких 1-кривых γ_1, γ_2, что они пересекаются трансверсально в конечном числе точек, точки персечения не совпадают с точками самопересечения кривых, а концы этих кривых покрывают все вершины квадрата.

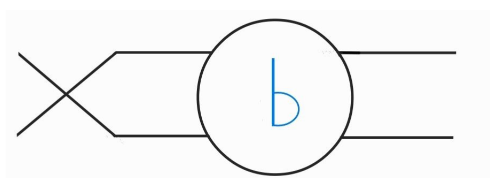
Определение. 2-кривую общего положения G будем называть *приводимой*, если в квадрате K найдется топологический диск D (с гладкой границей), край которого пересекает трансверсально 2-кривую G ровно в двух точках, а пересечение $G \cap D$ не является при этом простой дугой.

Будем рассматривать 2-кривые с точностью до неподвижных на крае изотопий.

Определение. Рассмотрим 2-кривую G. Пусть внутри G найдется такой фрагмент:



Где P также является 2-кривой. *Флайпом* называется следующее преобразование: P на 180 градусов вокруг оси, лежащей в плоскости K:



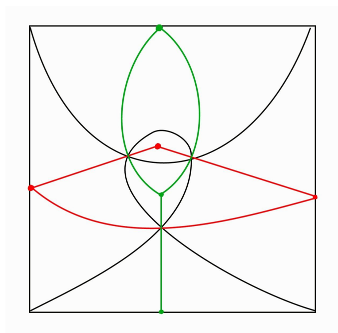
Замечание. Флайп сохраняет количество пересечений.

Определение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются области квадрата K, на которые 2-кривая его разбивает. Ребро между двумя областями соответствует пересечению в 2-кривой, разделяющему эти области. Этот граф имеет две компоненты связности.

Шахматным графом 2-кривой будем называть вложение этого графа в квадрат, при котором каждая вершина попадает в соответствующую ей область, а каждое ребро – в простую дугу, соединяющую вершины и проходящую через пересечение 2-кривой, которое разделяло смежные этому ребру области.

Замечание. Каждая компонента связности при этом отображении переходит в планарный граф, причем эти планарные графы являются двойственными относительно друг друга.

Пример.



Утверждение 1. *По шахматному графу 2-кривой можно восстановить 2-кривую.*

2. Основные результаты

Ниже приведена таблица с оценками на количество 2-кривых для фиксированного числа пересечений.

Количество пересечений	Количество 2-кривых с точностью до изотопии	Количество 2-кривых с точностью до флайп-эквивалентности
1	1	1
2	2	2
3	6	4
4	20	8
5	92	26
6	318	68

Список литературы

[1] И. С. Алексеев, А. М. Вершик, А. В. Малютин. *О росте числа простых узлав* 2021.
[2] Adams, Colin C. *The knot book.* American Mathematical Soc., 1994.