Александр Зайцев

Группы автоморфизмов поверхностей дель Пеццо степени 8

Для формулировки имеющихся результатов и оставшихся вопросов сразу дадим несколько определений.

Определение 0.1. *Пусть G — конечная группа. Назовем константой Жордана $J(G)$ наименьший индекс нормальной абелевой подгруппы в G. Пусть Γ — произвольная группа. Тогда Γ называется жордановой, если величина*

$$J(\Gamma) = \sup_{G \subseteq \Gamma, |G| < \infty} (J(G))$$

конечна. Если группа жорданова, то число $J(\Gamma)$ называется константой Жордана группы Γ.

Определение 0.2. *Гладкая проективная поверхность X называется поверхностью дель Пеццо, если ее антиканонический класс $-K_X$ обилен. Число K_X^2 называется степенью поверхности дель Пеццо.*

Определение 0.3. *Пусть X — поверхность дель Пеццо степени 8. Тогда X называется поверхностью дель Пеццо степени 8 типа p, если $X_{\overline{K}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{K}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$.*

Итак, нас интересует вопрос вычисления констант Жордана групп автоморфизмов рациональных поверхностей дель Пеццо степени 8 типа p над полями характеристики 0.

На самом деле у этих поверхностей есть более явное описание, а именно, рациональная поверхность дель Пеццо степени 8 типа p над полем K является либо произведением двух проективных прямых $\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$, либо ограничением скаляров по Вейлю с проективной прямой $R_{L/K}\mathbb{P}^1_L$, где $L \supset K$ — квадратичное расширение полей.

Для поверхностей $\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K$ доказана следующая теорема.

Теорема 0.4. *Пусть K - поле характеристики 0.*

1. $J(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K)) = 7200$ *тогда и только тогда, когда -1 является суммой двух квадратов в K, и K содержит $\sqrt{5}$;*
2. $J(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K)) = 72$ *тогда и только тогда, когда -1 является суммой двух квадратов в K, и K не содержит $\sqrt{5}$;*
3. $J(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_K \times \mathbb{P}^1_K)) = 8$ *тогда и только тогда, когда -1 не является суммой двух квадратов в K.*

В идеале хочется доказать аналогичную теорему для поверхностей $R_{L/K}\mathbb{P}^1_L$, то есть хочется по данному квадратичному $L \supset K$ расширению уметь вычислять константу Жордана $J(\mathrm{Aut}(R_{L/K}\mathbb{P}^1_L))$. На данный момент этого сделать не удается, однако имеются некоторые оценки.

Группа автоморфизмов поверхности $R_{L/K}\mathbb{P}^1_L$ описывается явно:

$$\mathrm{Aut}(R_{L/K}\mathbb{P}^1_L) \simeq \mathrm{PGL}_2(L) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

где группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ действует инволюцией Галуа расширения $L \supset K$, следовательно получаем оценки

$$J(\mathrm{PGL}_2(L)) \leq J(\mathrm{Aut}(R_{L/K}\mathbb{P}^1_L) \leq 2J(\mathrm{PGL}_2(L)).$$

Не смотря на то, что про конечные подгруппы группы $\mathrm{PGL}_2(L)$ известно многое, вычислить константу Жордана пока не удается даже для группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}(i)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Промежуточные вопросы

- Существует ли подгруппа в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}(i))$, изоморфная A_4, инвариантная относительно комплексного сопряжения такая, что комплексное сопряжение действует на подгруппе Клейна нетривиально?

  Замечание: понятно, что на всей подгруппе действие будет нетривиальным (так как $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ не содержит подгрупп, изоморфных A_4), но важно, чтобы на подгруппе Клейна действие тоже было нетривиальным.

- Такой же вопрос про S_4.

- Константа Жордана группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}(i)) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Возможно полезные факты

- $\mathrm{PGL}_2(L)$ содержит один класс сопряженности групп, изоморфных A_4, S_4 и A_5.

- Одно из вложений группы S_4 в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}(i))$:

$$(14) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (24) \mapsto \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, (23) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$