1 Аппроксимация решений дифференциальных уравнений в частных производных.

В данной работе доказана теорема о приближении одного класса решений параболических систем типа Ламе класса Лебега в цилиндрической области более регулярными решениями. Одной из первых работ в теории приближений решений дифференциальных уравнений в частных производных, была статья К. Рунге [22], который в 1885 году сформулировал теорему о возможности равномерного приближения голоморфных функций (голоморфными) многочленами. Ключевым в доказательстве К. Рунге был факт, что любая голоморфная функция в односвязной плоской области может быть равномерно приближена на компактах последовательностью рациональных функций, построенных с помощью ядра Коши. Позднее возникла и была решена задача о приближении голоморфных функций в меньшей области голоморфными функциями в большей области, такие области стали называть парами Рунге. С.Н. Мергелян решил задачу о равномерной аппроксимации гармонических функций в контексте пар Рунге областей из $\mathbb{R}^n$ см. [8]. Однако для приложений более важными оказались теоремы об аппроксимации в различных функциональных пространствах, где контролируется поведение элементов вблизи границ рассматриваемых множеств. Первые результаты в этой области были получены А.Г. Витушкиным [2] и В.П. Хавиным [11] (см. также монографию [25] для Соболевских решений систем дифференциальных уравнений с сюръективным/инъективным символом.

С учетом общих замечаний М.М. Лаврентьева [5], С. Бергмана [15], И.Ф. Красичкова [4], в работе Л.А. Айзенберга и А.М. Кытманова [1] был указан способ нахождения систем функций со свойством двойной ортогональности, который в комбинации с аппроксимационными теоремами и методом интегральных представлений ведет к построению формул Карлемана для приближенных решений задачи Коши для голоморфных функций. Данная схема была успешно распространена применительно к задаче Коши для широкого класса эллиптических уравнений, см. [25], [13], [23], [24], и даже для эллиптических дифференциальных комплексов см. [16].

В последние десятилетия область некорректных задач типа Коши распространялась за счет теории параболических уравнений см., например [20], [7], [18]. Однако, для приложений более важными оказались теоремы, где контролируется рост функций вблизи границы см., например [6]. В настоящей работе мы доказываем аппроксимационную теорему, которая применяется в описанной выше схеме при изучении некорректной задачи Коши для параболического оператора типа Ламе $\mathcal{L}$.

Более точно, согласно [20], некорректная задача Коши для оператора $\mathcal{L}$ в цилиндрической области $\mathbb{R}^{n+1}$ с данными на ее боковой границе может быть сведена к задаче продолжения решений оператора $\mathcal{L}$ из меньшей цилиндрической области в большую, а эта последняя в свою очередь решена с помощью систем с двойной ортогональностью, если рассматривать ее в подходящих пространствах Гильберта. Поскольку описанный метод требует полноты задействованной системы с двойной ортогональностью, то для применения схемы Л.А. Айзенберга необходимо доказать теорему о приближении решений параболического оператора типа Ламе из класса Лебега $L^2(\omega \times (T_1, T_2))$ более регулярными решениями из большей области $\Omega \times (T_1, T_2)$.

2 Аппроксимационная теорема для оператора Ламе.

Теорема 1. *Если* $\omega \subset \Omega$ *и* $\partial\omega,\ \partial\Omega \in C^2$, *то* $S_{\mathcal{L}}(\overline{\Omega \times (T_1, T_2)})$ *всюду плотно в* $L^2_{\mathcal{L}}(\omega \times (T_1, T_2))$ *тогда и только тогда, когда* $\Omega \setminus \omega$ *не имеет компактных компонент в* Ω.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Айзенберг, Л. А. О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на связном куске ее границы, 2 / Л. А. Айзенберг, А. М. Кытманов // Мат. сб. - 1993. – Т. 184, № 1. – С. 1–14.

2. Витушкин, А.Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений / А.Г. Витушкин // УМН. – 1967. – Т. 22, №6. – С. 3-26.

3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебное пособие / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва : Физматлит, 2004. – 158 с.

4. Красичков, И. Ф. Системы функций со свойством двойной ортогональности / И.Ф. Красичков // Матем. заметки - 1968. - Т.4, №5. С. 551–556.

5. Лаврентьев, М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка/ М. М. Лаврентьев// Докл. АН СССР. – 1957, Т. 112 №2, – С. 195–197.

6. Мазья, В. Г. О решениях задачи Коши для уравнения Лапласа (единственность, нормальность, аппроксимация) / В.Г. Мазья, В.П. Хавин // Тр. ММО. - 1974.- Т.30. - С.61-144.

7. Махмудов К. О. “Нестандартная задача Коши для уравнения теплопроводности” / К. О. Махмудов , О. И. Махмудов , Н. Н. Тарханов // Матем. заметки. - 2017. - Т.102,№2 (2017) - С. 270–283.

8. Мергелян, С.Н. гармоническая аппроксимация и приближение решения задачи Коши для уравнения Лапласа / С.Н. Мергелян // УМН. – 1956. – Т. 11, №5. – С. 3-26.

9. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михаилов. – Москва: Наука, 1976. – 156 с.

10. Тихонов, А. Н . Теоремы единственности для уравнения теплопроводности / А.Н. Тихонов // ДАН. - 1935. - Т.1, №5. - С. 294-300.

11. Хавин, В.П. Аппроксимация аналитическими функциями в среднем / В.П. Хавин // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 178, №5. – С. 1025-1028.

12. Шлапунов, А. А. Об аппроксимации решений уравнения теплопроводности класса Лебега L^2 более регулярными решениями / А.А. Шлапунов // Матем. заметки. - 2022. - Т.111, № 5. - С 111:5 (2022), 778–794.

13. Шлапунов, А. А. О задаче Коши для уравнения Лапласа / А. А. Шлапунов // Сиб. Матем. журн. - 1993. – Т.33, № 3. – С. 205–215.

14. Эйдельман, С.Д. Параболические уравнения / С.Д. Эйдельман // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. - 1990. - № 63. - С. 201-313.

15. Bergman, S. The kernel function and conformal mapping / S. Bergman. - Second revised edition. Mathematical Surveys, V, AMS, Providence, Rhode Island, 1970. - 155 P.

16. Fedchenko, D.P. On the Cauchy problem for the elliptic complexes in spaces of distributions/ D.P. Fedchenko, A.A. Shlapunov// Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014, V. 59, N. 5, P. 651–679.

17. Jones, B.F. Jr. An approximation theorem of Runge type for the heat equation / B.F.Jones, Jr. // Proc. Amer. Math. Soc. - 1975. - Vol. 52, № 1. - P. 289-292.

18. Kurilenko, I.A., Shlapunov, A.A., Kurilenko, I.A. On Carleman-type Formulas for Solutions to the Heat Equation/ I.A. Kurilenko, A.A.

Shlapunov// Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys. –2019, V. 12, № 4, P. 421–433.

19. Lions, J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéare*; Dunod/Gauthier-Villars. - Paris, 1969. P. 588.

20. Puzyrev, R.E. On a mixed problem for the parabolic Lame type operator/ R.E. Puzyrev, A.A.Shlapunov// J.Inv. Ill-posed Problems. –2015, V. 23, N. 6, pp. 555–570.

21. P. Vilkov, I. Kurilenko, A. Shlapunov, Approximation of solutions to parabolic Lamé type operators in cylinder domains and Carleman's formulas for them. https://arxiv.org/abs/2202.08457 (принята к публикации в Сибирском математическом журнале).

22. Runge, C. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen / C. Runge // Acta Math. – 1885. – №6. – P. 229-244.

23. Shlapunov, A. A. Bases with double orthogonality in the Cauchy problem for systems with injective symbols / A. A. Shlapunov, N. N. Tarkhanov // Proc. London Math. Soc.,1995. – V. 71,№ 3. – P. 1–52.

24. Shlapunov, A.A. On the Cauchy Problem for the Lame esystem / A.A. Shlapunov // Zeitschriftfufr Angewandte Mathematik und Mechanik, V. 76, № 4 (1996), p. 215-221.

25. Tarkhanov, N.N. The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations/ N.N. Tarkhanov. – Berlin: Akademie-Verlag, 1995. – 478 pp.