Константа Жордана для группы Кремоны ранга 2 над конечным полем

АНАСТАСИЯ В.ВИКУЛОВА

Группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F})$ ранга n — это группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbf{F}$. Несмотря на то, что она возникает очень естественно, ее изучение довольно трудоемкое. Более того, даже описание конечных подгрупп этой группы является чрезвычайно тяжелым делом. Например, оно доведено до конца в случае группы Кремоны ранга 1, так как $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$. А уже в случае ранга 2 были классифицированы классы сопряженности конечных подгрупп только над алгебраически замкнутым полем. Тем не менее, мы можем понять, какими свойствами могут обладать конечные подгруппы группы Кремоны.

Определение 1 ([4, Definition 2.1])**.** Группа G называется *жордановой*, если существует константа J такая, что любая конечная подгруппа G имеет нормальную абелеву подгруппу индекса не больше чем J. Минимальная такая константа J называется *константой Жордана* группы G и обозначается $J(G)$.

Ж.-П. Серром в [6, Theorem 5.3] было доказано, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ ранга 2 над полем $\mathbf{F}$ характеристики нуль является жордановой. Однако для алгебраически замкнутого поля $\mathbf{F}$ характеристики $p > 0$ этот факт уже неверен, так как в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ имеются простые подгруппы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$, порядок которых растет с ростом n. В статье [5] Ю.Г. Прохоровым и К.А. Шрамовым было доказано, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_{p^n})$ жорданова для любого простого числа p и $n \in \mathbb{N}$. Имеется следующий результат.

Теорема 1. *Константа Жордана* $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ *для группы Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ *равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|, & \text{если } q \neq 2; \\ |\mathrm{S}_6| > 168 = |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)| & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

Для доказательства этой теоремы достаточно изучить группы бирегулярных автоморфизмов поверхностей дель Пеццо и расслоений на коники над полем $\mathbb{F}_q$, поскольку любая конечная подгруппа G группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ регуляризуется на G-минимальной модели рациональной поверхности. Согласно [5, Corollary 5.3] и [5, Lemma 6.1], для расслоений на коники и для поверхностей дель Пеццо степени $4 \leqslant d \leqslant 9$ и $d = 2$ оценка на константу Жордана группы автоморфизмов не больше, чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$, что является порядком группы автоморфизмов $\mathbb{P}^2$. Поэтому нам нужно изучить группы регулярных действий на поверхности дель Пеццо степени 1 и 3, и нормальные абелевы подгруппы в этих группах.

Сначала изучим поверхности дель Пеццо степени 3. Группы автоморфизмов таких поверхностей вкладываются в группу $W(\mathrm{E}_6)$ (см. [2, Corollary 8.2.40]). Порядок этой группы равен $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51\,840$. Согласно классификации групп автоморфизмов кубической поверхности над алгебраически замкнутым полем (см. [3, Table 1]) получаем, что группой автоморфизмов кубики над $\overline{\mathbb{F}}_2$ максимального порядка является группа $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Данная группа есть группа автоморфизмов кубики Ферма $S \subset \mathbb{P}^3$ (см. [3, Table 8]), которая задана уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0. \tag{1}$$

Напомним, что $|\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 = 25\,920$. Однако для конечного поля $\mathbb{F}_2$ ситуация сильно меняется. Действительно, имеется следующий результат.

Утверждение 1. *Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ — кубика Ферма, заданная уравнением (1) над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{S}_4$.*

Для максимальной группы автоморфизмов кубик над полем $\mathbb{F}_2$ мы имеем

Теорема 2. *Пусть S — поверхность дель Пеццо степени 3. Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Более того, если порядок группы автоморфизмов равен 720, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.

Предъявим явно кубическую поверхность с группой автоморфизмов S_6.

Пример 1. Рассмотрим кубику $S \subset \mathbb{P}^3$, заданную уравнением

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что это уравнение задает гладкую кубику. Более того, (2) можно рассматривать как квадратичную форму, соответствующую билинейной кососимметрической форме

$$b(\bar{v}, \bar{w}) = v_1w_4 + v_2w_3 + v_3w_2 + v_4w_1,$$

где $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Очевидно, что эта форма является билинейной, так как любой $\alpha \in \mathbb{F}_2$ удовлетворяет уравнению $\alpha^2 = \alpha$, и выполнено равенство $b(\bar{v}, \bar{v}) = 0$. Форма $b(\bar{v}, \bar{w})$ инвариантна относительно действия группы $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{S}_6$ (см., например, [1, §5]), значит, уравнение (2) не меняется при действии этой группы. То есть мы имеем $\mathrm{S}_6 \subset \mathrm{Aut}(S)$, а по теореме 2 группа S_6 является максимальной. Значит, $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.

Отметим, что кубика (2) рациональна. В самом деле, на ней есть две непересекающиеся прямые l_1 и l_2, задающиеся уравнениями $x = y = 0$ и $z = t = 0$, соответственно, что и дает бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to S$.

Для поверхностей дель Пеццо степени 1 имеется следующий результат.

Утверждение 2. *Пусть S — гладкая поверхность дель Пеццо степени 1 над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{Aut}(S) \leqslant 2q^4(q-1)^2(q+1) < q^3(q^3-1)(q^2-1).$$

Список литературы

[1] J. Dieudonné, *Les Isomorphismes Exceptionnels Entre Les Groupes Classiques Finis*, CJM, **6** (1954), 305–315.

[2] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry. A modern view*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012

[3] I. Dolgachev, A. Duncan, *Automorphisms of cubic surfaces in positive characteristic*, Izv. RAN. Ser. Mat., **83** (2019), no.3, 15–92.

[4] V. L. Popov, *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties*, Affine algebraic geometry: the Russell Festschrift, CRM Proceedings and Lecture Notes, 54, Amer. Math. Soc. (2011), 289–311.

[5] Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Jordan property for Cremona group over a finite field,*

[6] J.-P. Serre, *A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field*, Mosc. Math. J., **9** (2009), no.1, 183–198.