Геометрия симметрического пространства типа EIII

Андрей Семенов, СПбГУ

1 Основные определения и факты

1.1 Симметрические пространства

Все рассматривается для связной редуктивной группы G, определенной над базовым полем характеристики не 2. Пусть H — некоторая подгруппа G.

Определение 1. Множество смежных классов G/H называется однородным пространством.

Под инволюцией на G мы будем понимать автоморфизм θ группы G порядка 2, и под G_θ мы будем понимать множество $\{g \in G \mid \theta(g) = g\}$ ее неподвижных точек. В случае редуктивности исходной группы это также редуктивная группа. Зафиксируем некоторую открытую подгруппу H в G_θ.

Определение 2. Множество смежных классов G/H называется симметрическим пространством. Множество $G(F)/H(F)$ называется симметрическим F-пространством.

1.2 Алгебры Альберта

Пусть F — поле характеристики не 2 и не 3.

Определение 3. Алгеброй Альберта A над полем F называется простая 27-мерная исключительная йорданова алгебра.

Для каждой алгебры Альберта A можно найти кубическую норму $N : A \longrightarrow F$ и линейный след $T : A \longrightarrow F$. Линейный след индуцирует невырожденную квадратичную форму $T(x, y) := T(xy)$ на A.

Для каждой кубической формы $f : X \longrightarrow Y$ можно расписать

$$f(\sum_i t_i x_i) = \sum t_i^3 f(x_i) + \sum_{i \neq j} t_i^2 t_j f(x_i, x_j) + \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k f(x_i, x_j, x_k),$$

и, таким образом, для каждого $x \in A$ можно выразить подобным образом форму $f(x + ty)$ и получить отображение $f_x : A \longrightarrow F$ как коэффициент при t для фиксированного $x \in A$.

Определение 4. Для каждого $x \in A$ определим $x^\# \in A$ по формуле $T(x^\#, y) = N_x(y)$ для всех $y \in A$. Так как T невырождено, такой элемент существует и однозначно определен.

Легко видеть, что отображение $\# : A \longrightarrow A$ квадратично, и можно рассмотреть его линеаризацию

$$x \times y := (x + y)^\# - x^\# - y^\#.$$

Определение 5. Определенное таким образом отображение $\times : A \times A \longrightarrow A$ называется *векторным произведением Фрейдентала*.

1.3 Алгебры Брауна

Пусть A — некоторая алгебра Альберта над F. Рассмотрим структурируемую алгебру $B(A, F\times F)$ по следующему правилу: B будет векторным пространством $\begin{pmatrix} F, & A \\ A, & F \end{pmatrix}$ с умножением, определенным по правилу

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & j_1 \\ j_1', & \beta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2, & j_2 \\ j_2', & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + T(j_1, j_2'), & \alpha_1 j_2 + \beta j_1 + j_1' \times j_2' \\ \alpha_2 j_1' + \beta_1 j_2' + j_1 \times j_2, & \beta_1\beta_2 + T(j_2, j_1') \end{pmatrix}.$$

Определим инволюцию на B следующим образом: $\overline{\begin{pmatrix} \alpha, & j_1 \\ j_1', & \beta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \beta, & j_1 \\ j_1', & \alpha \end{pmatrix}$. Эта конструкция дает центральную простую структурируемую алгебру над F.

Определение 6. Структурируемая алгебра $(B, -)$ называется *алгеброй Брауна*, если имеет место изморфизм $(B, -) \otimes F_s \simeq B^d \otimes F_s$, где $B^d = B(A^d, F\times F)$ является расщепимой алгеброй Брауна, а F_s обозначает сепарабельное расширение поля F.

Пространство антиэрмитовых элементов в этой алгебре одномерно, и мы будем писать $\mathrm{sk.}\dim B = 1$ для отражения этого факта. Оно порождено одним элементом $s_0 \in B$ со свойством $s_0^2 \in F^*$.

2 Симметрическое пространство типа EIII

Пусть F — поле характеристики не 2 и не 3 и K — его квадратичное расширение. Обозначим через B алгебру Брауна $B(A)$ (единственной) 27-мерной алгебры Альберта над F. Она имеет структуру структурируемой алгебры, и можно рассмотреть ее кватернионные подалгебры (в смысле структурируемых алгебр).

Лемма 1. *Множество $\mathcal{Q}$ кватернионных подалгебр в B биективно множеству рациональных точек симметрического пространства типа $E_6/D_5\cdot\mathbb{G}_m$.*

Лемма 2. *Если $Aut(B)^o$ анизотропна как алгебраическая группа, то дополнение к $\mathcal{Q}$ не имеет рациональных точек.*

Теперь рассмотрим отображение $\pi(Q) = K_Q^\perp \cdot B$, где $Q \in \mathcal{Q}$ и $K_Q^\perp$ обозначает ортогональное дополнение к K в Q, а умножение поточечное.

Лемма 3. *$\pi(Q)$ является подалгеброй в B и $\dim_F \pi(Q) = 22$ для любой кватернионной подалгебры Q в B. Более того, π индуцирует биекцию открытых подмногообразий в $R_{K/F}(Aut(B)_K^o/P_1)$ и $R_{K/F}(Aut(B)_K^o/P_6$ соответственно.*

Полезно представлять себе, что такое $\pi(Q)$. Над алгебраическим замыканием $\overline{F}$ поля F кватернионная подалгебра Q ассоциирована с парой идемпотентов (e, e') и имеет вид $Q = \begin{pmatrix} F & e'F \\ eF\times A & F \end{pmatrix}$, а $\pi(Q)$ над K имеет вид $\pi(Q)_K = \begin{pmatrix} K & e'\times A \\ e\times A & K \end{pmatrix}$, где линейное пространство $e\times A = H_2(\mathbb{O})$ имеет размерность 10 и является подалгеброй A, а ее стабилизатор является параболической подгруппой типа P_6.

Будем называть кватернионные подалгебры в B **точками**, а 22-мерные подалгебры, которые имеют вид $\pi(Q)$ — **прямыми**. Точка Q **инцидентна** прямой L, если $Q \leqslant L$ как подалгебра. Таким образом, мы имеем геометрию на симметрическом пространстве типа EIII.

Лемма 4. *Пусть G — группа внутреннего типа E_6, и пусть P_1 и P_6 — соответствующие параболические подгруппы. Тогда существуют фильтрации, чьи последовательные разности между соседними членами — аффинные расслоения над однородными многообразиями:*

$$\begin{tikzcd} G/P_6 \times G/P_6 & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^8"] & X & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & G/P_6 \\ & G/P_{1,6} & & G/P_{5,6}; & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G/P_6 \times G/P_1 & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^{16}"] & Y & \supset \arrow[d, "\mathbb{A}^5"] & G/P_{1,6} \\ & G/P_6 & & G/P_{5,6}. & \end{tikzcd}$$

Стрелки между аффинными расслоениями определяются формулами $P,\, Q \mapsto (P \cap Q) \cdot R_u(P)$, где P — типа P_6 и Q —типа P_6 или P_1 соответственно.

Из только что доказанного предложения следует, что существует ровно три случая взаимного расположения прямых L_1, L_2:

- они могут совпадать: это значит, что $L_1 = L_2 \in R_{K/F}(G_K/P_6)$;
- они могут быть в общем положении: это значит, что $(L_1, L_2) \in R_{K/F}((G_K/P_6 \times G_K/P_6) \setminus X)$;
- они могут быть в специальном положении: это значит, что $(L_1, L_2) \in R_{K/F}(X \setminus \Delta(G_K/P_6))$, где Δ обозначает диагональное вложение.

Аналогично, может быть лишь три случая взаимного расположения точек M_1, M_2, условия на которые выписываются из двойственной фильтрации. Далее, может быть только три случая взаимого расположения точки M и прямой L — условия на соответствующие положения описываются из второй фильтрации:

- они могут быть инцидентны: это значит, что $(M, L) \in \Delta(R_{K/F}(G_K/P_{1,6})$;
- они могут быть в общем положении: это значит, что $(L, M) \in R_{K/F}((G_K/P_6 \times G_K/P_1) \setminus Y)$;
- они могут быть в специальном положении: это значит, что $(L, M) \in R_{K/F}(Y \setminus \Delta(G_K/P_{1,6}))$, где Δ обозначает диагональное вложение.

Теорема 1.

1. *Для любых прямых L_1, L_2, если они в общем положении, то они пересекаются не более чем в одной точке. Если к тому же $Aut(B)^o$ анизотропная группа, то они пересекаются ровно в одной точке.*
2. *Для любых прямых L_1, L_2, если они в специальном положении, то множество точек, в которых они пересекаются, биективно множеству рациональных точек симметрического пространства $A_4/A_3 \cdot \mathbb{G})_m$. В частности, это (с точностью до биекции) аффинное открытое подмногообразие в $R_{K/F}(\mathbb{P}^4)$.*
3. *Множество точек, принадлежащих данной прямой, биективно рациональным точкам симметрического пространства $D_5/D_4 \cdot \mathbb{G}_m$. В частности, это (с точностью до биекции) аффинное открытое подмногообразие сужения Вейля K на F 8-мерной изотропной гладкой квадрики.*