В настоящей работе исследована задача Коши для одного класса нелинейных возмущений оператора Коши-Римана в пространствах Соболева в ограниченных областях. Доказано, что задача является некорректной и имеет не более одного решения в выбранных функциональных пространствах.

Всюду ниже под $D \subset \mathbb{C}$ будем понимать ограниченную область с кусочно-гладкой границей ∂D.

Определение 1. Будем называть $S \subset \partial D$ *гладким куском границы*, если оно открыто в относительной топологии ∂D и связно.

Определение 2. Говорят, что задача поставлена *корректно по Адамару* в некотором классе функций M, если

- решение задачи существует в классе M;
- решение задачи единственно в классе M;
- решение задачи непрерывно зависит в классе M от данных задачи (начальных и граничных условий, коэффициентов уравнения и т.д.).

Определение 3. Обозначим через $W^{s,p}(D)$ такое подмножество функций в $L_p(D)$, все частные производные которых до порядка $s \in \mathbb{N}$ включительно лежат в $L_p(D)$. Линейное пространство $W^{s,p}(D)$ с нормой

$$\|u\|_{W^{s,p}(D)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|^p_{L_p(D)} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

называется *(слабым) пространством Соболева.*

Определение 4. Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, и $0 \leqslant s < 1$, а D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей. *Пространство Соболева-Слободецкого* $W^{s,p}(\partial D)$ состоит из всех фукнций $u \in L_p(\partial D)$, для которых

$$\|u\|_{W^{s,p}(\partial D)} = \|u\|_{L_p(\partial D)} + \|u\|_{w^{s,p}(\partial D)} < +\infty, \tag{2}$$

где

$$\|u\|_{w^{s,p}(\partial D)} = \left(\int\limits_{\partial D} \int\limits_{\partial D} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp-1}}\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Определение 5. Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$, $2 < p < \infty$. Определим оператор Коши-Римана как:

$$\overline{\partial} : W^{s,p}(D) \longrightarrow W^{s-1,p}(D); \quad u \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i \frac{\partial u}{\partial x_2} \right),$$

где $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ понимаются в смысле обощенных производных.

Задача 1. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ - ограниченная область с кусочно гладкой границей, а S - гладкий кусок границы ∂D и $n \in \mathbb{N}$. Для заданных $f \in L_p(D)$ и $u_0 \in W^{1-1/p,p}(S)$ найти такую функцию $u \in W^{1,p}(D)$, что выполнено:

$$\begin{cases} \overline{\partial} u + u^n = f & \text{в } D, \\ u = u_0 & \text{на } S. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $p > 2$. Задача 1 имеет не более одного решения.*

Предложение 1. *Задача 1 является некорректной по Адамару в пространствах Соболева.*

В исследовании использовались метод интегральных представлений и общие методы функционального анализа, а также некоторые идеи из работы посвященной нелинейным возмущениям корректной задачи Римана-Гильберта.