Обозначим $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$, $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{n}$, $\mathbb{Z}_{\geqslant}$ — множество неотрицательных целых чисел. Для $x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ обозначим рациональный параллелипипед

$$\Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant t_j \leqslant x_j,\ j = 1, \ldots, n\}$$

и для функции $\varphi(t)$ переменных $t = (t_1, \ldots, t_n)$ рассмотрим задачу о нахождении суммы

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t), \tag{0.1}$$

т.е. требуется найти явную формулу, в которой сумма (0.1) выражается через конечное, не зависящее от x число значений некоторой функции.

Для $n = 1$ эту задачу удаётся решить, если известна дискретная первообразная функции $\varphi(t)$ (см. [?]), то есть решение $f(t)$ разностного уравнения

$$f(t+1) - f(t) = \varphi(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

а именно тогда сумма (0.1) равна $S(x) = f(x+1) - f(0)$.

Приведём определение преобразования Бореля степенных рядов и некоторые его свойства, которые потребуются в работе. Преобразованием Бореля степенного ряда

$$\varphi(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{a_\nu}{\nu!} z^\nu \tag{0.2}$$

называется ряд вида

$$\mathfrak{B}[\varphi(z)] = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{a_\nu}{z^{\nu+I}}. \tag{0.3}$$

Функции $\varphi(z)$ и $\mathfrak{B}[\varphi(z)]$ называются ассоциированными по Борелю, $\varphi(z)$ — верхняя функция, $\mathfrak{B}[\varphi(z)]$ — нижняя функция преобразования.

Приведём интегральное представление для дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$.

Теорема 0.1. *Пусть $\varphi(x) \in Exp(\mathbb{C}^n)$, $\sigma \in \sigma_\varphi$ и $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| = r_j,\ r_j \geqslant \sigma_j,\ r_j \neq 2\pi m,\ j = 1, \ldots, n,\ m \in \mathbb{Z}_{\geqslant}\}$, тогда функция, определённая формулой*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{\mathfrak{B}[\varphi(\xi)] e^{\langle x, \xi \rangle}}{e^{\xi} - I} d\xi \tag{0.4}$$

является дискретной первообразной для $\varphi(x)$, и для суммы (0.1) справедлива формула:

$$S(x) = w_{NL}(\delta, \pi) f(x). \tag{0.5}$$

Интегральное представление (0.4) и дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница (0.5) позволяют получить два варианта формулы Эйлера-Маклорена.

Теорема 0.2. *Пусть в условиях теоремы (0.1) точка* $(2\pi,\dots,2\pi)\in\sigma_\varphi$*, тогда справедливы следующие варианты формулы Эйлера-Маклорена для суммы (0.1):*

$$S(x)=\sum_{\nu\in I+\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{\partial^{\nu-I}\varphi(0)}{\partial t^{\nu-I}}\frac{1}{\nu!}w_{NL}(\delta,\pi)B_\nu(x), \tag{0.6}$$

$$S(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{B_\nu}{\nu!}w_{NL}(\delta,\pi)\partial^{\nu-I}\varphi(x). \tag{0.7}$$

Здесь частная производная минус первой степени - это интеграл от 0 до x_i

$$\frac{\partial^{-1}\varphi(x)}{\partial x_j}=\int\limits_0^{x_j}\varphi(\pi_j x+te_j)dt.$$

Отметим, что вариант (0.6) формулы Эйлера-Маклорена является новым даже для случая $n=1$.

Если применить формулу (0.6) к моному от одной переменной $\varphi(t)=t^n$, получим классическую формулу для вычисления суммы степеней первых n чисел:

$$S(x)=\frac{1}{n+1}(B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(0)).$$

Но в первую очередь интересно интегральное представление из теоремы (0.1). Его можно использовать не только для доказательства формулы Эйлера-Маклорена. Например, докажем классическое равенство:

$$B_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^kB_{n-k}(x).$$

Весьма просто вычислить, что первообразной для функции $t^{(n-1)}$ является $\frac{1}{n}B_n(x)$, а преобразование Бореля от монома даёт нам функцию $\frac{(n-1)!}{t^n}$. Применив теорему (0.1), получим:

$$B_n(x)=\frac{n!}{(2\pi i)}\int\limits_\Gamma\frac{1}{\xi^n}\frac{e^{x\xi}}{e^\xi-1}d\xi. \tag{0.8}$$

$$B_n(x+y)=\frac{n!}{(2\pi i)}\int\limits_\Gamma\frac{1}{\xi^n}\frac{e^{x\xi}e^{y\xi}}{e^\xi-1}d\xi=\frac{n!}{(2\pi i)}\int\limits_\Gamma\frac{1}{\xi^n}\frac{e^{x\xi}}{e^\xi-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y\xi)^k}{k!}d\xi.$$

$$B_n(x+y)=\frac{n!}{(2\pi i)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\int\limits_\Gamma\frac{1}{\xi^{n-k}}\frac{e^{x\xi}}{e^\xi-1}d\xi.$$

Все члены ряда при $k>n$ равны нулю в силу того, что это интеграл от голоморфной функции. Остальные члены преобразуем с помощью формулы (0.8) и получим искомое.