О бесселевости собственных функций граничной задачи для уравнения типа Бесселя

Барият Меджидова

МГУ имени Ломоносова

bariyatmedzhidova@yandex.ru

1 Ведение

Пусть H - гильбертово пространство. Систему функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H называют бесселевой, если:

$$\exists \beta > 0 : \forall f \in H \sum_{k=1}^{\infty} |(f, f_k)|^2 \leq \beta \|f\|^2.$$

Впредь будем рассматривать гильбертово пространство $L_2 = L_2\,[a;b]$ Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Ly \equiv -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\, y \tag{1}$$

при $0 < \nu < 1$ на интервале $(0;1)$. Собственные функции оператора L, соответствующие собственному значению $\mu \in \mathbb{C}$, – это не равные тождественному нулю решения уравнения

$$Ly \equiv \mu^2 y. \tag{2}$$

Известно, что любое решение уравнения (2) принадлежит классу $L_2(0;1)$ при всех $\mu \in \mathbb{C}$.

Также известно, что уравнение (2) имеет два линейно независимых решения ([1]):

$$y_1 = \sqrt{x} J_\nu(\mu x),\ y_2 = \sqrt{(}x) Y_\nu(\mu x), \tag{3}$$

где

$$J_\nu(t) = \left(\frac{1}{2}t\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}t^2\right)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

- функция Бесселя первого рода, а

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}$$

- функция второго рода (функция Неймана). Общее решение уравнения (2) записывается в виде

$$y(x) = c_1\sqrt{x} J_\nu(\mu x) + c_2 \sqrt{x} Y_\nu(\mu x). \tag{4}$$

Из разложения функции Бесселя в степенной ряд следует, что при $x \to 0$

$$y_1(x) = O(x^{\nu + \frac{1}{2}}),\ y_2(x) = O(x^{-\nu+\frac{1}{2}}).$$

Из этих оценок следует, что для $\nu \geq 1$ только y_1 имеет интегрируемый квадрат в окрестности нуля. Если же $0 \leq \nu < 1$, оба решения имеют интегрируемый квадрат.

Пусть $M = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ - счетное множество, $y(x;\mu_k)$ - некоторое решение уравнения (2) при $\mu = \mu_k$. Далее установим свойство бесселевости системы функций $\{\ y(x;\mu_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ при некоторых условиях на числа μ_k.

2 Бесселевость решений краевой задачи для уравнения типа Бесселя

Рассмотрим вспомогательные функции

$$u_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\nu}}\, x^{\nu + \frac{1}{2}},\ u_{2,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\nu}}\, x^{-\nu - \frac{1}{2}}, \tag{5}$$

которые являются решениями уравнения (2) при $\mu = 0$. Тогда определены граничные функционалы

$$\langle y, u_{1,0}\rangle|_{x\to 0},\ \langle y, u_{2,0}\rangle|_{x \to 0} \tag{6}$$

для всех функций $y(x) \in D_{max}(L) = \{y \in L_2(0;1) : Ly \in L_2(0;1)\}$; здесь и далее символом $\langle y, z\rangle$ обозначен вронскиан $y'z - yz'$.

Лемма. Для любых $y, z \in D_{max}(L)$ на произвольном интервале $(a,b) \subset (0,1)$ выполнено равенство

$$\int_a^b Ly\bar{z}dx = \int_a^b yL\bar{z}dx - W(y,z)|_{x=b} + W(y,z)|_{x=a},$$

где

$$W(y,z) = \begin{vmatrix} \langle y, u_{1,0}\rangle & \langle y, u_{2,0}\rangle \\ \langle z, u_{1,0}\rangle & \langle z, u_{2,0}\rangle \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для уравнения (1) с условиями

$$\langle y, u_{2,0}\rangle|_{x\to 0} = 0,\ y(1) = 0 \tag{7}$$

Из леммы следует, что сопряженная задача задается теми же краевыми условиями, и, следовательно, задача (1), (7) является самосопряженной.

Подставив представление (4) общего решения в левую часть первого условия (7) и воспользовавшись формулой для цилиндрических функций $Z'_\nu(t) = Z_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t}\,Z_\nu(t)$, получим:

$$(c_1 x^{-\nu+1} J_{\nu-1}(\mu x) + c_2 x^{-\nu+1} Y_{\nu-1}(\mu x))|_{x\to 0} = 0. \tag{8}$$

Из свойств цилиндрических функций можно вывести условие $c_1 + c_2\cot((\nu-1)\pi) = 0$. С учетом этого получаем, что функция $y(x) = \sqrt{x}Y_\nu(\mu x) - \cot((\nu-1)\pi)\sqrt{x}J_\nu(\mu x)$ является нетривиальным решением уравнения (1), удовлетворяющее условию (7) в точке $x = 0$.

Из второго условия (7) следует, что значения параметра μ являются решениями уравнения

$$Y_\nu(\mu) - \cot((\nu-1)\pi)J_\nu(\mu) = 0.$$

Известно, что это уравнение имеет бесконечно много положительных нулей, расстояние между которыми асимптотически стремится к π. Из аналитичности цилиндрических функций по μ и их асимптотического поведения при $\mu \to \infty$ следует, что решения последнего уравнения образуют счетную последовательность $\{\mu_k^*\}$, удовлетворяющую соотношению

$$\mu_k^* = -\frac{\pi}{4}(2\nu+1) + \pi k + o(1),\ k \to \infty. \tag{9}$$

Таким образом, для самосопряженной задачи (1), (7) получена ортогональная система ее собственных функций

$$\sqrt{x}G_\nu(\mu_k^* x) = \sqrt{x}Y_\nu(\mu_k^* x) - \cot((\nu-1)\pi)\sqrt{x}J_\nu(\mu_k^* x). \tag{10}$$

Система функций $\sqrt{\mu x}J_\nu(\mu x)$ является почти нормированной в $L_2(0,1)$ при $|\mu| > 1$ (см. [2]). Покажем, что верен аналогичный факт для цилиндрических функций (10).

Лемма. Функции вида $\sqrt{\mu x}J_\nu(\mu x) + \alpha(\nu)Y_\nu(\mu x)$, где $\alpha(\nu)$– произвольная константа, не зависящая от μ, являются почти нормированными в $L_2(0,1)$ при $|\mu| > 1,\ \sup|\mathrm{Im}(\mu)| < \infty$.

Из этого факта следует, что система функций $\left\{\sqrt{\mu_k^* x}G_\nu(\mu_k^* x)\right\}$, где μ_k^* удовлетворяют асимптотике (9), является почти ортонормированным базисом в $L_2(0,1)$ и что эта система функций является бесселевой в $L_2(0,1)$.

Справедлива

Теорема. Пусть $M = \{\mu_k : k \in \mathbb{N}\}$ –счетное множество комплексных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\mathrm{Im}(\mu_k) \leq c_1,\ k \in \mathbb{N}$$
$$\sum_{k:\ s \leq |\mu_k| \leq s+1} 1 \leq c_2,\ s > 0,$$

где $c_1,\ c_2$– некоторые положительные постоянные. Пусть $Z_\nu(t)$–любая нетривиальная цилиндрическая функция порядка ν. Тогда система функций $\left\{\sqrt{\mu_k x}Z_\nu(\mu_k x) :\ k \in \mathbb{N}\right\}$ является бесселевой в $L_2(0,1)$.

Идея доказательства состоит в том, чтобы записать числа μ_k из условия теоремы в виде $\mu_k = \xi_k + \delta_k$, где $\delta_k = O(1),\ \xi_k$–нули функции $G_\nu(t)$, определенной формулой (10), и, пользуясь бесселевостью систем $\left\{\sqrt{\xi_k x}G_\nu(\xi_k x)\right\}_1^\infty$ и $\left\{\sqrt{x}J_\nu(\mu_k x) : \mu_k \in M\right\}$, доказать, что оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \left| \int_0^1 \sqrt{x}G_\nu(\mu_k x)\overline{f(x)}dx \right|^2 \leq O(1)\|f(x)\|^2_{L2(0,1)}$$

выполняется равномерно по $f(x) \in L_2(0,1)$.

Список литературы

[1] Жиляев А.И. Исследование спектральных характеристик вырождающихся несамосопряженных дифференциальных операторов, 1988.

[2] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье, УМН, 1951, том 6, выпуск 2(42), с. 102–143.

[3] Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Математика. Том IV, Уч. записки Моск. гос. ун-та, 148, Изд-во Моск. ун-та, М., 1951, с. 69–107