Гладкие веса и слабо бирациональные фильтрации мотивов

Давид Кумаллагов
Санкт-Петербургский государственный университет

1 Краткое описание

В работе изучаются различные триангулированные категории мотивной природы (наибольший интерес для нас представляют $DM(k)$ и $SH(k)$, и их эффективные версии, см. [Voe], [Mor]). Здесь k- совершенное поле.

А именно, в терминах мотивных спектров гладких многообразий строятся некоторые семейство ортогоналов, и доказываются различные утверждения о связи этих ортогоналов с классической гомотопической $t-$структурой t_{hom}. Посредством таких конструкций получаются различные хорошо известные конструкции и подкатегории (Чжоу-весовая структура, слабо бирациональные подкатегории, слайс-фильтрации). В частности, получено доказательство того факта, что гомотопическая $t-$структура ограничивается на подкатегории слабо бирациональных мотивов.

Используя полученные ортогоналы, мы строим фильтрации на сердцевине t_{hom}^{eff}, и выражаем условия слабой бирациональности её объектов в классических терминах (когомологий Нисневича, стягиваний Воеводского).

Важным наблюдением является то, что полученные ортогоналы дают весовые и $t-$структуры, названные гладкими (w_{Sm} и t_{Sm}, соответственно). С помощью t_{Sm} мы строим интересную функториальную фильтрацию на Ht_{hom}^{eff}.

Наконец, мы получаем различные следствия в виде вычислений неразветвленных когомологий (без использования разрешений особенностей и компактификаций), а также фильтрацию, удовлетворяющую многим свойствам гипотетической фильтрации Блоха–Бейлинсона–Мюрра.

2 Некоторые утверждения, конструкции, замечания и планы

Для всякой последовательности $s = (s_j)$ из $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ определим $\mathcal{A}_s = (\{\mathcal{M}(SmVar) < j > [t_j]\})^{\perp}$, где $t_j < s_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Здесь $SmVar$ - гладкие многообразия, $\mathcal{M}$ - функтор мотива.

Предложение A. Определим последовательность s^{r-bir} так : $s_j^{r-bir} = -\infty$ при $0 \leq j \leq r$, и ∞ иначе. Тогда для $S \in Ht_{hom}^{eff}$ следующее эквивалентно:

1.) $S \in \mathcal{A}_{s^{r-bir}}$

2.) Nis-когомологии обнуляются в степенях $> r$.

3.) $S(K\{r+1\}) = 0$ для всех полей функций K/k.

4.) $S_{-r-1} = 0$ (стягивание Воеводского).

Замечание Из этого предложения и некоторого вспомогательного технического результата получаем, что t_{hom} ограничивается на слабо бирациональные мотивы, и многие другие обобщения утверждений статьи [KaSu].

Наши классы $\mathcal{A}_s$ задают правую часть весовой структуры w_{Sm}, которая, в свою очередь, дает $t-$структуру t_{Sm}.

Замечание Весовые структуры - это аналоги t- структур, аксиоматизирующие "глупую" фильтрацию комплексов. Они крайне полезны в изучении категорий топологической и мотивной природы, так как выделяют замкнутые относительно ретрактов подкатегории, а не абелевы, как это происходит в случае t-структур. Например, легко можно определить весовую структуру Чжоу, сердцевиной которой будут классические мотивы Чжоу (см. [Bon]).

Конструкция Рассмотрим $G \in Ht_{hom}^{eff}$, и определим фильтрацию:

$$F^{j,s}(G) = H_0^{hom}(\tau_{\geq -j}^{t_{Sm}^s}(G)) \to G$$

Здесь τ -срезка в t_{Sm}, H_0^{hom} - нуль-гомологии для t_{hom}.

Тогда имеется следующая

Теорема B.

1.) Категория i- бирациональных объектов - абелева подкатегория Серра в Ht_{hom}^{eff}, обозначим через j_i ее вложение.

2.) $F^{j,s}$ - правый сопряженный к вложению j_r функтор.

3.) Функтор высшей неразветвленной части $R_{nr,i}$ дается срезкой $\tau_{\geq 0}^{t_{Sm}^{s^{i-bir}}}$.

4.) $w_{Sm}^{s^{i-bir}}$-срезки дают соответствующие слайсы.

Замечание. Если в пункте (4) рассмотреть порожденную фильтрацию на функторе $DM^{eff}(-, R < n >) \cong CH^n(-)$, то она будет удовлетворять всем свойствам фильтрации Блоха-Бейлинсона-Мюрра (кроме, быть может, (BBM4)). См. также [Jan], [Pel].

Заметим еще, что F^0 даёт неразветвленную часть $DM^{eff}(-, S)$. Как очень частный случай, так получаются стандартные неразветвленные когомологии, см. [CTH].

В [Kum] мы планируем обобщить полученные конструкции и утверждения на относительный случай, а также использовать мотивный подход к определению высших неразветвленных когомологий (что дает концептуальную реинтерпретацию результатов работы [Sch]).

3 Литература

[Bon] Bondarko M., Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general) J. K-theory. 6 (2010), no. 3, 387-504.

[BonKum] M. Bondarko, D. Kumallagov, Smooth weight structures and birationality filtrations on motivic categories, https://arxiv.org/abs/2106.01464v1

[CTH] J.-L. Colliot-Thél'ene, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. Lectures at the 1992 AMS Summer School. Santa Barbara, California.

[Jan] U. Jannsen. Motivic sheaves and filtrations on Chow groups. In Motives (Seattle, WA, 1991), volume 55 of Proc. Sympos. Pure Math., pages 245–302. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[KaSu] Kahn B., Sujatha R., Birational motives, II: triangulated birational motives// Int. Math. Res. Notices 2017 (22), 2017, 6778–6831.

[Kum] D. Kumallagov, Relative smooth weight structures and applications, work in progress.

[Mor] Morel F., An introduction to A^1-homotopy theory, in: Contemporary Developments in Algebraic K-theory (M. Karoubi, A. O. Kuku, C. Pedrini eds.), ICTP Lecture Notes, vol. 15, 2003, 357–441.

[Pel] Pelaez P., Mixed motives and motivic birational covers// J. Pure Appl. Algebra 221(7), 2017, 1699–1716.

[Sch] S.Schreieder, Refined unramified homology of schemes, https://arxiv.org/abs/2010.05814v5

[Voe] V. Voevodsky. Triangulated categories of motives over a field. In Cycles, transfers, and motivic homology theories, volume 143 of Ann. of Math. Stud., pages 188–238. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.