О когомологиях комплекса де Рама в весовых пространствах Гёльдера

Положим

$$w(x) = \sqrt{1+|x|^2},\ \ w(x,y) = \max\big\{w(x), w(y)\big\},\ \ x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Для $s\in\mathbb{Z}_+$ и $\delta\in\mathbb{R}$ обозначим через $C^{s,0}_\delta$ пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{s,0}_\delta} = \sum_{|\alpha|\leqslant s}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} w^{\delta+|\alpha|}(x)\big|\partial^\alpha u(x)\big|.$$

Пусть $\mathcal{X}$ есть некоторое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда пусть $U\subset\mathbb{R}^n$ будет непустой ограниченной окрестностью нуля в топологии $\mathbb{R}^n$, если $\mathcal{X}$ не ограничено, или пустым множеством в противном случае. Для $0<\lambda\leqslant 1$ положим

$$\langle u\rangle_{\lambda,\delta,\overline{\mathcal{X}}} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathcal{X}}\setminus U, x\neq y\\ |x-y|\leqslant|x|/2}} w^{\delta+\lambda}(x,y)\frac{\big|u(x)-u(y)\big|}{|x-y|^\lambda}.$$

Пусть $C^{0,\lambda}_\delta$ состоит из всех непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}_\delta} = \|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{U})} + \|u\|_{C^{0,0}_\delta} + \langle u\rangle_{\lambda,\delta,\mathbb{R}^n},$$

где $\|\cdot\|_{C^{0,\lambda}(\overline{U})} = \|\cdot\|_{C^{0,0}(\overline{U})} + \langle\cdot\rangle_{\lambda,\overline{U}}$ есть норма обычного пространства Гельдера $C^{0,\lambda}(\overline{U})$ на компакте $\overline{U}$.

Наконец, для $s\in\mathbb{Z}_+$, пусть $C^{s,\lambda}_\delta$ обозначает пространство всех s раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{s,\lambda}_\delta} = \sum_{|\alpha|\leqslant s}\|\partial^\alpha u\|_{C^{0,\lambda}_{\delta+|\alpha|}}.$$

Для дифференциального оператора A, действующего на дифференциальных формах над $\mathbb{R}^n$, обозначим через $C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q}\cap\mathcal{S}_A$ пространство дифференциальных форм $u\in C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q}$, удовлетворяющих $Au=0$ в смысле распределений в $\mathbb{R}^n$.

Далее будет рассмотрен комплекс вида

$$0\to C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^0}\xrightarrow{d_0} C^{s-1,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^1}\xrightarrow{d_1}\dots\xrightarrow{d_{s-2}} C^{1,\lambda}_{\delta+(s-1),\Lambda^{s-1}}\xrightarrow{d_{s-1}} C^{0,\lambda}_{\delta+s,\Lambda^s}\cap\mathcal{S}_{d^s}\xrightarrow{d_s} 0,\ \ (1)$$

где d^q — дифференциалы де Рама, заданные внешними производными, а $C^{s,\lambda}_{\delta,\Lambda^q}$ — множество внешних дифференциальных форм степени $0\leqslant q\leqslant n$ с коэффициентами из $C^{s,\lambda}_\delta$.

Рассмотрим непрерывные линейные операторы

$$\left(d^q, (d^{q-1})^*\right) : C^{s+1,\lambda}_{\delta,\Lambda^q} \to C^{s,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^{q+1}} \cap \mathcal{S}_{d^{q+1}} \oplus C^{s,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^{q-1}} \cap \mathcal{S}_{(d^{q-2})^*}, \qquad (2)$$

Пусть $\mathcal{H}_{\leqslant m,\Lambda^q}$ пространство дифференциальных форм степени q, коэффициенты которых — гармонические многочлены степени $\leqslant m$.

Теорема 0.1. *Пусть $n \geqslant 2$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \lambda < 1$. Если $\delta > 0$ и $\delta + 1 - n \notin \mathbb{Z}_+$, то оператор (2) является фредгольмовым. Более того,*

1. *(2) — изоморфизм, если $0 < \delta < n - 1$;*
2. *(2) — инъекция с замкнутым образом, если $n - 1 + m < \delta < n + m$ при $m \in \mathbb{Z}_+$; более точно, образ оператора (2) состоит из всех пар $f \in C^{s,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^{q+1}} \cap \mathcal{S}_{d^{q+1}}$, $g \in C^{s,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^{q-1}} \cap \mathcal{S}_{(d^{q-2})^*}$, удовлетворяющих*

$$(f, d^q h)_{L^2_{\Lambda^{q+1}}(\mathbb{R}^n)} + (g, (d^{q-1})^* h)_{L^2_{\Lambda^{q-1}}(\mathbb{R}^n)} = 0$$
$$\text{для всех } h \in \mathcal{H}_{\leqslant m+1,\Lambda^q}. \qquad (3)$$

Рассмотрим оператор

$$(\Phi - \Phi_m)\, f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \wedge \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{J(k)} \frac{h^{(j)}_k(x)\, (d^{n-q-1})^*_y (h^{(j)}_k(y)(\star dy_I))dx_I}{(n+2k-2)\vartheta^{n+2k-2}(x)}$$

где $\vartheta(x)$ – какая-нибудь гладкая функция такая, что $\vartheta(x) = |x|$ для $|x| \geqslant 2$ и $0 < 1/\vartheta(x) \leqslant 1$, а $\{h^{(j)}_k\}$ — однородные гармонические многочлены, образующие ортонормированный базис в $L^2(\partial B_1)$ на единичной сфере ∂B_1 в $\mathbb{R}^n$, у которых k — степень однородности многочлена, j — номер однородного многочлена степени k в базисе.

Теорема 0.2. *Пусть $n \geqslant 2$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \lambda < 1$ и $n + m - 1 < \delta < n + m$. Тогда группы когомологий комплекса (1) конечномерны и изоморфны образу оператора $d\,(\Phi - \Phi_m)$, действующего из $Z^{s,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^{q+1}}$ в $Z^{s,\lambda}_{\delta+1,\Lambda^{q+1}}$.*