Задача (Многомерная интерполяция Лагранжа). *Для заданных значений* $\{c_w\}$, $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$, *найти многочлен* $f(z)$ *с условием*

$$f(w) = c_w, \qquad w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0). \tag{0.1}$$

Если в качестве $H(z,\zeta)$ предлагается взять определитель $H(z,\zeta)$ матрицы (h_{jk}):

$$p_j(z) - p_j(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - \zeta_k) h_{jk}(z,\zeta), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

То будет справедлива следующая теорема:

Теорема 0.1. *Многочлен*

$$f(z) = \sum_{w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)} c_w H(z,w) \operatorname*{res}_w \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^I} \right),$$

где $\operatorname*{res}_w \left(\frac{1}{\boldsymbol{p}^I} \right)$ *— локальный вычет Гротендика, решает поставленную задачу (0.1)*

Рассмотрим многомерный аналог задачи Эрмита. Пусть $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — последовательность n многочленов от n переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$ с конечным числом общих корней $\boldsymbol{p}^{-1}(0)$. Обозначим через B_w мономиальный базис локальной алгебры $\mathcal{O}_w / \langle \boldsymbol{p} \rangle$ в точке $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$. Множество показателей ℓ базисных мономов $(z-w)^\ell \in B_w$ обозначим A_w.

Задача (Многомерная интерполяция Эрмита). *Для заданных значений* $\{c_{w,\ell}\}$, $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0); \ell \in A_w$, *найти многочлен* $f(z)$ *с условием*

$$\frac{\partial^{|\ell|} f}{\partial z^\ell}(w) = c_{w,\ell}, \qquad w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0) \qquad \ell \in A_{w_j},$$

где $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ *и* $|\ell| = \ell_1 + \ldots + \ell_n$.

Мы здесь рассмотрим многомерный вариант приведенной задачи в случае, когда многогранники Ньютона носителей A_{w_j} по сути являются параллелепипедами вида $\{0 \le \ell_1 \le d_1 - 1\} \times \ldots \times \{0 \le \ell_n \le d_n - 1\}$.

Рассмотрим многомерную ситуацию ($n > 1$). Для краткости письма будем считать, что $a = 0$ — начало координат в $\mathbb{C}^n$. Пусть $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — росток голоморфного отображения со свойствами:

$$\frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} Q_i}{\partial z^{\boldsymbol{\alpha}}}(0) = 0 \qquad 0 \le \alpha_i \le d_i - 1 \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{0.2}$$

$$\det \left[\frac{\partial^{d_j} Q_i}{\partial z_j^{d_j}}(0) \right] \neq 0. \tag{0.3}$$

Теорема 0.2. *Предположим, что для каждого корня $w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)$ существует такой вектор $d_w = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, что*

$$\frac{\partial^{|\ell|} p_i}{\partial z^{\ell}}(w) = 0, \; 0 \le \ell \le d_w - I, \tag{0.4}$$

$$\det \left\| \frac{\partial^{d_k} p_i}{\partial z_k^{d_k}}(w) \right\| \neq 0 \quad (\text{ здесь } i, k = 1, \ldots, n). \tag{0.5}$$

Тогда многочлен

$$f(z) = \sum_{w \in \boldsymbol{p}^{-1}(0)} \det H_w(z) \left[\sum_{\substack{\ell \le d_w - I \\ k \le d_w - I - \ell}} \frac{c_{w,\ell}}{\ell!} (z - w)^{\ell + k} \operatorname*{res}_w \left(\frac{(z - w)^{d_w - I - k}}{\boldsymbol{p}^I} \right) \right] \tag{0.6}$$

решает поставленную задачу, где $H_w(z) = ||h_{ik}||$, — матрица из представления

$$\begin{pmatrix} p_1(z) \\ \vdots \\ p_n(z) \end{pmatrix} = H_w(z) \begin{pmatrix} (z_1 - w_1)^{d_1} \\ \vdots \\ (z_n - w_n)^{d_n} \end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

Лемма 0.1. *Дана система ростков $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{O}_0$ таких, что выполняются условия (0.2), (0.3): Тогда в кольце $\mathcal{O}_0$ имеет место равенство идеалов:*

$$\langle Q_1, \ldots, Q_n \rangle = \langle z_1^{d_1}, \ldots, z_n^{d_n} \rangle. \tag{0.8}$$