Пространства реализаций графа

Эдуард Бирючевский, МКН СПБГУ

July 2022

1 Introduction

Пусть $\Gamma = (V, E)$ – граф без кратных ребер и ребер вида (v_i, v_i), с $V = v_1..., v_m$ - множеством вершин и E - множеством ребер. *Реализация* графа Γ это отображение $p : V \to \mathbb{R}^2$ такая, что из $(ij) \in E$ следует $p(v_i) \neq p(v_j)$. Вместо $p(v_i)$ условимся писать p_i. Таким образом, реализация представляет собой вложение графа в двумерную плоскость с возможными пересечениями ребер и, вероятно, с совпадающими вершинами, только если между этими вершинами нет ребра. *Стрессом* на реализации называется функция $s : E \to \mathbb{R}$.
Стресс можно представлять себе как замена ребер графа упругими пружинами в растянутом или сжатом(в зависимости от знака $s(e_i)$) положении. Стресс называется равновесным стрессом, если для каждой вершины v

$$\sum_{(v,w)\in E} s(v,w)(\mathbf{p}(v) - \mathbf{p}(w)) = 0$$

Равновесный стресс называется нетривиальным, если он не является тождественно равным нулю.
Множество всех равновесных стрессов $\mathfrak{S}(\Gamma, p)$ является линейным пространством, естественно вложенным в $\mathbb{R}^e$, где e - количество ребер графа.

Реализация (Γ, p) называется стрессабельной, если $dim\mathfrak{S}(\Gamma, p) > 0$.

Пусть дана реализация (Γ, p), определим ориентированный матроид $M(\Gamma, p) = SIGN(\mathfrak{S}(\Gamma, p) > 0)$. То есть, чтобы получить матроид, произвольным образом пронумеровать ребра графа и для каждого нетривиального стресса, записать знаки $s(i, j)$. Мы получим набор строчек вида $(+, -, 0)^{|E|}$, который является ориентированным матроидом[1]. Пространством реализации графа Γ является множество всех реализаций Γ, профакторизованных по действию афинной группы:

$$R(\Gamma) = \{p : p \ is \ a \ realisation \ of \ \Gamma\}/Aff(\mathbb{R}^2)$$

Пространство реализации графа для заданного матроида M определяется как множество всех реализаций, для которых знаки стрессов совпадают со знаками матроида.

$$R(\Gamma, M) = p \in R(\Gamma) : M(\Gamma, p) = M$$

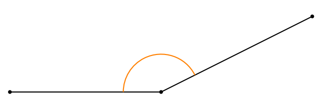
Полуалгебраическое множество - подмножество $\mathbb{R}^N$, заданное полиномиальными равенствами и неравенствами. *Открытое базовое главное полуалгебраическое множество(Open basic primary semialgebraic, OBPS)* - полуалгебраическое множество, которое задается только строгими неравентсвами с рациональными коэффицентами. Два OBPS множества называются стабильно эквивалентными, если можно преобразовать одно в другое рациональной функцией и стабильной проекцией(подробнее, [3]). В частности, стабильная эквивалентность сохраняет гомотопический тип.

Теорема Универсальности.[2] *Для каждого OBPS множества* $\mathfrak{U}$ *существует граф* Γ *и ориентированный матроид* M *такой что простанство реализации* Γ *и ориентированный матроид* M *такие что пространство реализации* $R(\Gamma, M)$ *стабильно эквивалентно к* $\mathfrak{U}$.

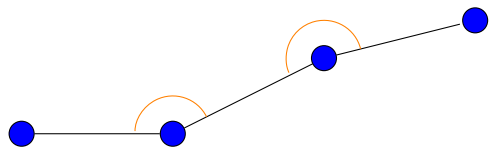
Более того, эта теорема дает способ конструировать графы с заданными пространствами реализации, однако оказывается, что сложность этих графов очень велика. В общем случае, задача построения небольших графов с заданным пространством реализации кажется в данный момент неподъемной. Даже для относительно простых топологичестких пространств(тор с несколькими ручками, сфера) вид таких графов неочевиден.

Одна из тем, которой посвещена моя работа, это попытка найти простые графы, пространство реализаций которых соответствовало некоторым топологическим пространствам(OBPS множеств), а также найти регулярности в том, как вид графа меняется при изменении топологического пространства.

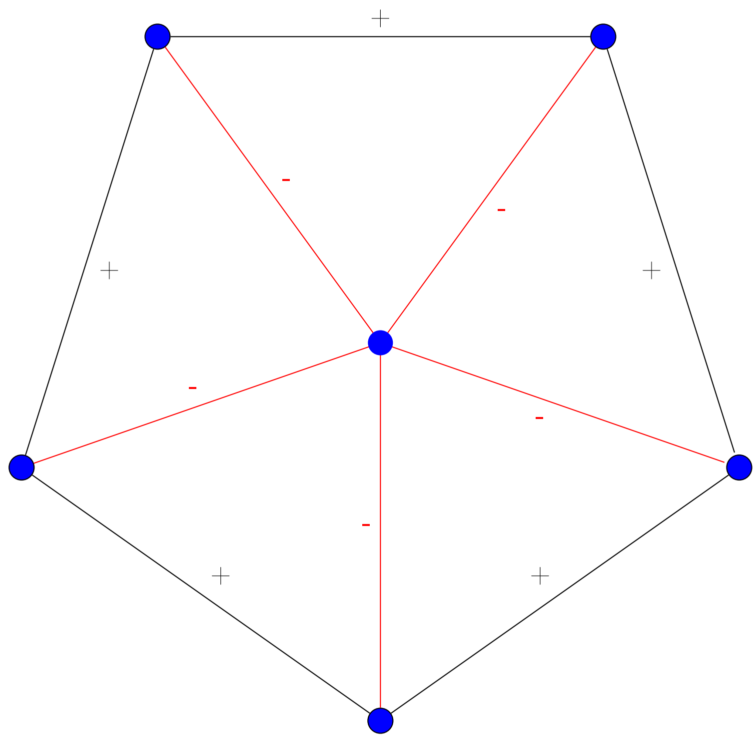
Некоторые примеры.

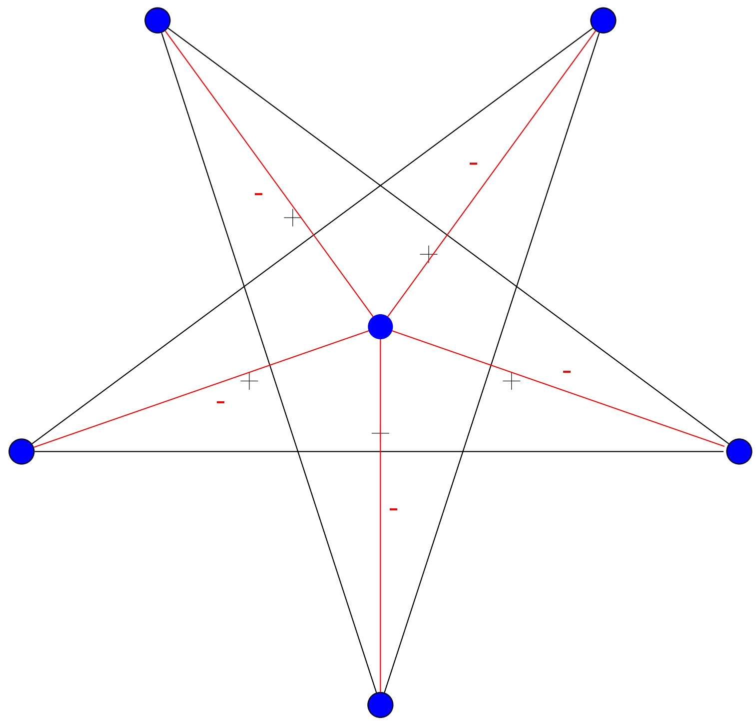
Γ  Пусть дан граф Γ из трех вершин и двух ребер, связывающих их и матроид $\{0, 0\}$. По фактору действия афинной группы можно считать, что вершины 1 и 2 находятся в фиксированных точках, допустим, (0, 0) и (1, 0). Тогда пространство реализации определяется положением третьей точки. Факторизуя по отражениям, получаем, $R(\Gamma, M) = \mathbb{R}^2_+$. С точностью до гомотопической эквивалентности - точка.

Пусть дан граф из четырех вершин и трех ребер, и матроид $\{0, 0, 0\}$. Тогда $R(\Gamma, M)$ определется положением вершин 3 и 4, координата каждой из которых, с точностью до гомотопической эквивалентности, задается S^1. Получаем тор со склеенными антиподальными точками. Посчитав эйлерову характеристику можно понять, что это сфера.



Рассмотрим граф Г, изображенный ниже в двух реализациях. Заметим, что при непрерывной деформации одной реализации в другую возникают конфигурации точек, в которых силы не могут быть уравновешены, поскольку три ненулевые силы могут быть в равновесии(при умножении каждой не некоторый ненулевой коэффицент) только тогда, когда обратный к каждому из векторов находится между двумя другими(т.е. является линейной комбинацией с отрицательными коэффицентами двух других векторов), а это правило нарушается при "выворачивании"графа.
Можно сделать вывод, что пространство реализации данного графа(с матроидом) несвязно.





Список литературы

[1] A. Bjorner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. M. Ziegler, *Oriented matroids. volume 46 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.

[2] G.Panina *A universality theorem for stressable graphs in the plane* arXiv:1902.07212, 2019

[3] J. Richter-Gebert, *Realization Spaces of Polytopes.* Berlin/Heidelberg, Springer, 1996.