Несколько вопросов в алгебраической топологии

Гомотопические группы пространства топологических вложений

$$\mathrm{Conf}(I, \mathbb{R}^2) := \mathrm{Emb}(I, \mathbb{R}^2)/\mathrm{Aut}(I)$$

. Гипотеза $\pi_1(\mathrm{Conf}(I, \mathbb{R}^2)) = \mathbb{Z}$. Интересен тот же вопрос для отображений графов в $\mathbb{R}^n$ и в другие многообразия.

Известный открытый вопрос: существует ли подпространство $\mathbb{R}^3$, фундаментальная группа которого содержит кручение (для $\mathbb{R}^2$ нет Eda, 1998). Этот вопрос связан с изучением случайных диких явлений, на границах выбранного формализма топологического пространства (скажем, по-видимому, в категории компактно порожденных пространств класс фундаментальных групп подпространств $\mathbb{R}^3$ будет отличаться). Естественное ограничение открытыми подмножествами очень упрощает вопрос, тогда действительно интересным становится полное описание класса фундаментальных групп хороших подпространств. Чтобы ограничиться конечнопредставимыми фундаментальными группами естественно потребовать, чтобы замыкание хорошего подпространства было конечным комплексом. Нетрудно видеть, что фундаментальные группы хороших подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$ в точности свободные группы, а фундаментальные группы хороших подпространств $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$ все конечнопредставленные группы. **Каков класс фундаментальных групп хороших подпространств $\mathbb{R}^3$**? Необходимое условие: отсутствие кручения. Не достаточное, пример: $\mathbb{Z}^3$.

Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{B}$ произвольные категории, пусть $F\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$. *Метакатегорией дополнительных структур* над F называется метакатегория, объекты которой существенно сюръективные, полные функторы $X\colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}_X$, $\mathcal{C}_X$ конкретная категория над $\mathcal{B}$ (т.е. снабжена унивалентным функторами в $\mathcal{B}$), а морфизмы – функторы конкретных категорий $\mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y$, коммутирующие с X, Y. Инициальный объект в метакатегории инвариантов называватеся *наибольшей дополнительной структурой* над F (ясно, что категория тонкая).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_Y \arrow[ddr, bend left] & \\
 & \mathcal{C}_X \arrow[u, dashed] \arrow[dr] & \\
\mathcal{E} \arrow[uur, bend left] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Существует ли наибольшая дополнительная структура над функторами $\pi_n\colon \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Set}$ и если да, то какая? Верно ли, что наибольшая дополнительная структура над $\pi_0\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ есть пространство компонент связности?

Характеризация пространств Эйленберга-Маклейна, допускающих структуру когруппового объекта. Таковыми являются окружность $K(\mathbb{Z}, 1)$ (соотв. букеты окружностей $K(\mathrm{FreeGroup}(X), 1)$) и рациональные нечетномерные сферы $K(\mathbb{Q}, 2n+1)$ (надстройки четномерных). Ещё примеры?

Как устроены подобъекты пространств Эйленберга-Маклейна? Так как $[X, S^1] = H^1(X)$, которая свободна от кручения по теореме об универсальных коэффициентах, то любое нетривиальное отображение $S^1 \to S^1$ является мономорфизмом в гомотопической категории. Существуют ли ещё подобъекты S^1? Так как $H^2(X)$ вообще говоря имеет любое кручение, то никакое отображение $K(\mathbb{Z}, 2) \to K(\mathbb{Z}, 2)$ (кроме изоморфизмов соотв. ± 1) не является мономорфизмом.