Группы 5-транспозиций и связанные с ними алгебры

Всеволод Афанасьев [1]

[1] Новосибирский Государственный Университет

Преамбула

Одной из идей в теории конечных групп является взаимодействие с алгебрами, для которых данные группы задают автоморфизмы. Эксплуатация этой связи позволяет как изучать алгебры, используя известную информацию об их симметриях, так и работать с группами используя некоторые алгебраические конструкции. В частности, группы можно строить как группы автоморфизмов некоторых алгебр. Таким образом, например, была построена знаменитая спорадическая группа $\mathbb{M}$ (Монстр группа).

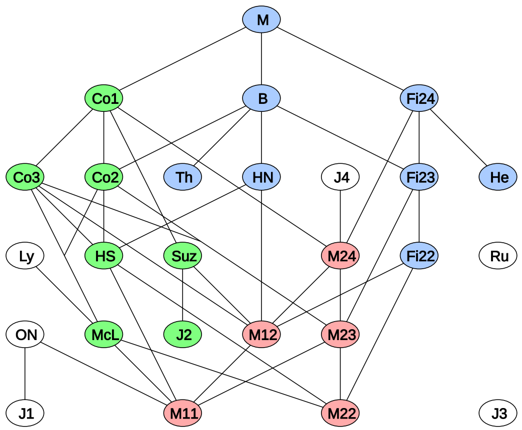

Рис. 1. Иерархия спорадических групп

Проблема

Однако из за своих размеров группа $\mathbb{M}$ изучена не до конца, а также неизвестен простой способ ее построения.

$$|\mathbb{M}| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

Естественная идея – взаимодействие с той самой алгеброй, через которую группа была построена. Ивановым был предложен следующий подход: по подгруппам группы $\mathbb{M}$ строить алгебры, удовлетворяющие тем же свойствам, что и алгебра для $\mathbb{M}$ [1]. Данная идея породила начало теории Majorana алгебр, развивающейся и по сей день.

Группы n-транспозиций

Majorana алгебры имеют тесную связь со следующим классом групп:

Определение. Группа G называется группой n-транспозиций, если она порождается множеством D, таким что

1. $x \in D \implies |x| = 2$
2. Для любого $g \in G,\ x \in D\ g^{-1}xg \in D$
3. Для любых $x, y \in D\ |xy| \leq n$

Простейший пример: группы перестановок. Также примерами являются множество конечных простых (в том числе спорадических) групп, например вышеупомянутая $\mathbb{M}$ – группа 6-транспозиций.

Классификация

Самым серьезным результатом на данный момент является полная классификация конечных групп 3-транспозиций (см. обзор и результаты в [2]). При увеличении n начинаются проблемы: основные методы классификации для $n > 3$ – компьютерные, но есть несколько неприятных (больших) примеров (в частности, $\mathbb{M}$ и потенциально бесконечная $B(2,5) : \mathbb{Z}_2$ – расширение группы Бернсайда). Поэтому прогресс лишь частичный.

Теорема. Все группы 5-транспозиций, порожденные тремя элементами, два из которых коммутируют, конечны и являются гомоморфными образами одной из следующих групп:

Наименование	Описание расширения
$Z_2 \times S_4$	
$Z_2 \times A_5$	
$Z_5^2 : D_8$ $D_8 = \langle d_1, d_2 \rangle$	$d_1 : e_1 \to -e_1$ и $e_2 \to e_2$ $d_2 : e_1 \to e_2$ и $e_2 \to e_1$
$Z_4^2 : D_8$ $D_8 = \langle d_1, d_2 \rangle$	$d_1 : e_1 \to e_1$ и $e_2 \to 2e_1 - e_2$ $d_2 : e_1 \to -e_1$ и $e_2 \to -e_2$
$(S_3 \times S_3) : Z_2$	Z_2 действует как (1,4)(2,5)(3,6) на естественном вложении S_3^2 в S_6
$Z_2 \times (Z_2^4 : D_{10})$	действие задается изоморфизмом $Aut(Z_2^4) \cong A_8 \cong GL_4(2))$
$[((Z_4 \times Z_2^2) : Z_4) : D_8] : D_{10}$	
$PGL(2,9)$	

Majorana алгебры

Вторая часть работы – построение примеров алгебр связанных с группами. Для этого, как упоминалось выше, удобно работать в классе Majorana алгебр. Они были впервые рассмотрены в [1] как объекты, удовлетворяющие ряду свойств алгебры Грайса (алгебры, группой автоморфизмов которой является $\mathbb{M}$). А именно

- Они являются коммутативными алгебрами, порождаемыми осями – идемпотентами, удовлетворяющими нескольким свойствам.
- На них можно задать положительно определенную билинейную форму $(,)$, такую что
  - для любой оси $(a, a) = 1$
  - для любых элементов u, v, w алгебры имеем $(uv, w) = (u, vw)$

Связь между двумя рассмотренными объектами выражается через понятие Majorana представления группы 5-транспозиций $G = \langle D \rangle$. Оно состоит из Majorana алгебры A, в которой каждому элементу из D сопоставляется порождающая алгебру ось и гомоморфизма $G \to Aut(A)$, удовлетворяющих ряду аксиом.

Построение этих представлений опирается на следующий результат:

Теорема (Сакума). Существует 9 типов Majorana алгебр, порожденных двумя осями (диэдральных алгебр).

Будем называть представление k-замкнутым, если оно порождается (как модуль) множеством вида $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, где x_i – "исходные" оси.

Абстрактно алгоритм Majorana представлений данной группы $G = \langle D \rangle$ (их может быть несколько) выглядит следующим образом:

1. Определить возможные типы диэдральных подалгебр порожденных парами осей, соответствующих элементам из D.
2. Добавить новые элементы (существующие по теореме Сакумы) в множество осей.
3. С помощью соответствия "подгруппа, порожденная D - подалгебра в представлении A а также решения (довольно больших) систем линейных уравнений попытаться найти значения формы $(,)$ и таблицу умножения. (довольно трудоемкий шаг, если группа большая)
4. В случае невозможности заполнения какой-то из таблиц перейти к $k+1$ замыканию и повторить шаг 3.

Для неразрешимых групп 5-транспозиций из таблицы выше получены следующие результаты:

- Для группы $Z_2 \times A_5$ вычислено 4 Majorana представления. Три из них 2-замкнуты и имеют размерности 21, 26 и 20, а еще одно 3-замкнуто и имеет размерность 46.
- Для группы $PGL(2,9)$ вычислено 2-замкнутое подпространство (его размерность 117) и вычислены все значения формы на базисе.

References

[1] A.A Ivanov, D.V. Pasechnik, Á. Seress, S.Shpectorov, Majorana representations of the symmetric group of degree 4. *Journal of Algebra*, 2010, vol. 324, pp. 2432–2463.

[2] J.I. Hall, The general theory of 3-transposition groups *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 1993. vol. 114 pp. 269-294.